Oggi è il giorno 4/09/2009
Le vacanze stanno finendo e fra poco si tornerà a scuola. E' quindi tempo di lanciare uno stimolante, anche se non troppo difficile, problema di geometria analitica. L'ho chiamato così:

UN ERRORE C'E' DI SICURO!!

In una classe di terza liceo è stato assegnato un compito nel quale si chiedeva l'area di un poligono essendo note le coordinate, tutte razionali , dei suoi vertici.
Antonio e Bruno consegnarono il compito dopo poco tempo con questi risultati:

Antonio: $Area = 18\sqrt{7} + 7$ **Bruno:** $Area = \dfrac{18}{5 - \sqrt{7}} - \sqrt{7}$

L'insegnante, pur non avendo ancora risolto il problema e non conoscendo la risposta esatta, disse con sicurezza che nei calcoli di Antonio "UN ERRORE C'ERA DI SICURO" e che il suo risultato era sbagliato. Sui calcoli di Bruno, invece, non fu in grado di dare una risposta immediata e si riservò di correggere il compito con calma più tardi.

Le domande che pongo sono le seguenti:

Perchè il risultato di Antonio era sicuramente sbagliato?
Perchè il risultato di Bruno non fu scartato immediatamente?

Attendo risposte rigorosamente giustificate al solito indirizzo tonipulita@hotmail.com

---

25/09/09
E' arrivata la soluzione di **Federico Rossetto 4^F** e **Damiano Toffanin 5^F.**
La loro soluzione è molto bella e sintetica ma per coloro che non hanno dimestichezza con il calcolo matriciale è bene darne prima una meno "specialistica".

SOLUZIONE:

L'insegnante, anche se non conosce il risultato esatto, sa che questo risultato deve essere espresso da un numero razionale ed ha quindi scartato immediatamente la risposta di Antonio perchè il suo risultato è irrazionale. La risposta di Bruno, che semplificata diventa il numero 5, potrebbe invece essere esatta e quindi merita un ulteriore controllo.

Dimostro che l'area del poligono è rappresentata da un numero razionale:

1°) Traccio dal vertice più a destra e da quello più a sinistra due rette verticali;
2°) Traccio dal vertice più alto e da quello più basso due rette orizzontali;
3°) Le quattro rette sopra tracciate individuano un rettangolo che contiene il nostro poligono;
4°) La parte del rettangolo esterna al poligono è scomponibile in un numero finito di triangoli rettangoli o di trapezi rettangoli (basta tracciare dai vertici del poligono gli opportuni segmenti orizzontali o verticali;
5°) I cateti dei triangoli, le basi e le altezze dei trapezi sopra descritti hanno misure razionali perchè risultano da differenze di ascisse o di ordinate che per ipotesi sono razionali.
6°) Le aree dei triangoli e dei trapezi sopra descritti, ed anche quella del rettangolo circoscritto, sono espresse da numeri razionali perchè si ottengono con operazioni di addizione, moltiplicazione e e divisione fra numeri razionali ;
7°) L'area del poligono è quindi razionale perchè si ottiene sottraendo dall'area (razionale) del rettangolo, quelle (altrettanto razionali) dei triangoli e dei trapezi.

Vediamo ora quella di Federico e Damiano

SOLUZIONE

- Un poligono qualsiasi è suddivisibile in un numero finito di triangoli aventi per vertici i vertici del poligono.
  L'area del poligono è data dalla somma delle aree di questi triangoli.

- L'area di un triangolo date le coordinate dei vertici è:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_2$$

quindi
se le coordinate sono razionali anche l'area ha un valore razionale.

quindi

→ il valore $18\sqrt{7}+7$ è scartabile a priori, poichè è irrazionale.

→ $\frac{18}{5-\sqrt{7}} - \sqrt{7}$ non è scartabile a priori, poichè è razionalizzabile e potrebbe essere in realtà un numero razionale.
(Difatti razionalizzando si ottiene 5).

N.B.

Nel calcolo dell'area c'è un piccolo errore di calcolo (distrazione) perchè l'ultimo termine nello sviluppo del determinante non è $-x_3y_2$ ma è $-x_2y_1$