24/2/2009

"PICCOLI, PICCOLINI, PICCOLISSIMI"

Nel medio evo li chiamavano "piccoli", "Piccoli del primo tipo" e "piccoli del secondo tipo".
Ora li chiamiamo così:

"Minuti", "minuti primi" e "minuti secondi"

Si sa che la misura degli angoli si può effettuare in gradi sessagesimali e che il grado è definito come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. Per capire quanto sia grande l'angolo di un grado si può disegnare un angolo retto e dividerlo a metà tracciando la sua bisettrice. Si ottengono così due angoli da 45° e, ripetendo la bisezione se ne ottengono quattro da 22.5°. Questa operazione
ripetuta 6 volte porta ad angoli che misurano circa 1,4°. In pratica è difficile fare queste 6 bisezioni perchè la punta della penna è grossa ed il foglio di carta su cui si lavora non è mai abbastanza grande. L'angolo di un grado viene comunque visto abbastanza bene.
La cosa però diventa molto più difficile se si pretende di disegnare l'angolo di "un primo" che è la sessantesima parte dell'angolo di un grado e diventa spaventosamente complicata se si vuole disegnare l'angolo di " un secondo" che è addirittura la sessantesima parte dell'angolo di "un primo".
Per ottenere l'angolo di "un secondo" bisogna quindi dividere l'angolo giro in 1.296.000 parti uguali.
Queste considerazioni suggeriscono alcune domande che costituiscono il "lancio" odierno:

Domande non troppo difficili

1°) Indica qualche scienza nella quale sono necessarie unità di misura così piccole per gli angoli;

2°) Quanto deve essere lungo il raggio di un goniometro circolare se per individuare un angolo al centro ampio "un secondo" occorre fissare sulla circonferenza un arco lungo un metro? (Si dia la risposa in metri trascurando le parti decimali).

Domanda Difficile

3°) Indica un metodo di calcolo manuale che permetta di ottenere il risultato della seconda domanda senza ricorrere alla calcolatrice o ai manuali che danno il valore di π con moltissime cifre dopo la virgola.

Attendo risposte al solito indirizzo tonipulita@hotmail.com

SOLUZIONE

1°) Se in un triangolo isoscele ABC di base AB si sposta il vertice C lungo la retta dell'altezza CH, si vede che all'aumentare dell'altezza diminuisce l'ampiezza dell'angolo ACB e quando C sarà molto lontano da AB l'angolo al vertice sarà molto minore di quello iniziale.
Pensate ora agli astronomi che devono misurare gli angoli che dalla terra puntano due stelle lontanissime nel cielo. In moltissimi casi gli angoli in questione misurano qualche "primo" o addirittura pochi secondi anche se le due stelle si vedono ad occhio nudo.
E' questo il caso della stella Mizar di cui vi racconto un pò di storia:

Mizar è una stella nella costellazione dell'Orsa Maggiore. Il nome viene dall'arabo ميزر mīzar, che significa "cintura". Il nome della stella secondo la nomenclatura di Bayer è Zeta Ursae Majoris. Mizar ha una magnitudine apparente di 2,40 e un tipo spettrale A1 V. All'indagine astronomica si rivela un sistema stellare composto da un totale di sei stelle.

Mizar è ben visibile ad occhio nudo. Le persone di buona vista possono notare una debole stella compagna appena ad est, chiamata Alcor oppure 80 Ursae Majoris. Le due sono a volte chiamate rispettivamente il Cavallo e il Cavaliere da una traduzione dalla lingua persiana, e l'abilità nel vederle entrambe è un test tradizionale della vista (usato già in antichità: era una delle prove attitudinali per le aspiranti guardie dell'imperatore nei paesi arabi). Alcor ha magnitudine apparente 4,02 e un tipo spettrale A5 V. La sua magnitudine la renderebbe relativamente facile da scorgere, se non fosse così vicina alla più brillante Mizar.

La distanza reale tra le due stelle è superiore ad un quarto di anno luce, quindi molto alta, ma il loro moto proprio mostra che sono in effetti una stella binaria e non una binaria apparente come si pensava in precedenza.

Altri componenti della stella sono stati scoperti con l'avvento del telescopio e dello spettroscopio. Mizar fu la prima binaria visuale (al telescopio) ad essere scoperta, per merito di Giovanni Battista Riccioli nel 1650. La

secondaria (Mizar B) ha magnitudine 4,0 e tipo spettrale A1, e si trova a 380 UA dalla primaria (Mizar A). Le due stelle orbitano l'una attorno all'altra con un periodo di duemila anni. Mizar A divenne poi la prima binaria spettroscopica ad essere scoperta, per merito di Edward Charles Pickering nel 1889. Le due componenti sono entrambe circa 35 volte più luminose del Sole, e orbitano l'una rispetto all'altra in soli 20 giorni. Anche Mizar B e Alcor sono diventate binarie spettroscopiche, portando il numero totale di stelle del sistema a sei.

Questo sistema stellare si trova a circa 78 anni luce di distanza dalla Terra. Le sei componenti fanno tutte parte dell'ammasso dell'Orsa Maggiore, così come la maggior parte delle stelle di questa costellazione. Dai dati sopra esposti si può calcolare l'ampiezza dell'angolo che dalla terra punta la coppia di stelle del sistema binario sopra descritto (cavallo e cavaliere). Questo angolo vale circa 12 primi e 38 secondi.

2°) Il Goniometro che faccia corrispondere un arco di un metro all'angolo di un secondo dovrebbe avere un raggio lungo poco più di 206264 metri. Il raggio dovrebbe quindi essere lungo più di 206 km. Una circonferenza con il centro a Bassano e passante per Milano farebbe quindi al caso nostro.
La dimostrazione proviene dal fatto che l'angolo giro misura 1.296.000 secondi e dalla proporzionalità fra archi ed angoli al centro si deduce:

$$1 : 2\pi r = 1 : 1296000 \Rightarrow r = \frac{1296000}{2\pi} \cong 206264.8m$$

3°)Per poter trovare manualmente il risultato del punto precedente senza andare a cercare sui manuali le cifre di π io mi calcolerei le cifre di questo π con qualche algoritmo che si presti allo scopo (ce ne sono moltissimi) ma per non rubare le ottime idee dei grossi matematici degli ultimi 200 anni, ne suggerisco uno alla portata degli alunni del biennio attraverso i ragionamenti fatti anche da Archimede:

1°) In un cerchio di raggio unitario inscrivo e circoscrivo due esagoni regolari.
I loro lati misurano : $l = 1$ ed $L = 2/\sqrt{3}$ ed i loro perimetri misurano p=6 e P=.$12/\sqrt{3}$

2°) Se C è la misura esatta della circonferenza risulta $6 < C < 12/\sqrt{3}$ e, dividendo per il diametro d=2 si ottengono due "carabinieri" di π che ne offrono valori approssimati per difetto e per eccesso

$$3 < \pi < 6/\sqrt{3} \cong 3.46410161$$

3°) Un valore di π , sempre sbagliato ma più attendibile, si può ottenere dalla media aritmetica dei due "carabinieri" e così si perviene a: $\pi \cong 3.23205080$

4°) Se si raddoppia il numero dei lati del poligono inscritto e di quello circoscritto in quel cerchio e si ripete il procedimento sopra descritto si perfeziona l'approssimazione di π e per fare ciò, basta osservare che se l_n ed l_{2n} sono i lati di due poligoni regolari inscritti in un cerchio di raggio unitario ed aventi rispettivamente n e 2n lati, sussiste la relazione :

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^{\,2}}}$$

mentre fra il lato l dell'ennagono regolare inscritto ed il lato L dell'ennagono regolare circoscritto sussiste la relazione: $L = 2l/\sqrt{4 - l^2}$

Nota: Le due relazioni derivano da semplici applicazioni del teorema di Pitagora e dalla similitudine fra triangoli.

5°) Il raddoppio del numero dei lati e le conseguenti sempre migliori approssimazioni di π può essere portato avanti quanto ci pare e quanto ci piace con soli calcoli che coinvolgono le sei operazioni radicorazionali. Basta avere tempo, voglia, carta, e penne sufficienti.
Si capisce che se, per esempio, i due carabinieri di π sono numeri decimali coincidenti fino alla quinta cifra dopo la virgola (come succede per i poligoni di 1536 lati ottenuti dopo aver raddoppiato 8 volte il numero dei lati dell'esagono iniziale), queste prime 5 cifre decimali sono sicuramente cifre esatte anche per π . Archimede raddoppiò 4 volte i lati dei due esagoni regolari da cui era partito e studiò quindi i poligoni da 96 lati ottenendo un valore di π esatto fino alla terza cifra decimale.

La tabella sottostante mostra i risultati ottenuti da Archimede con i poligoni da 6-12-24-48-96 lati:

Numero di lati	π **per difetto**	π **per eccesso**	π **valor medio**
6	**3**	**3,464101**	**3,232050**
12	**3,105828**	**3,215390**	**3,160609**
24	**3,132628**	**3,159659**	**3,146144**
48	**3,139350**	**3,146086**	**3,142718**
96	**3,141031**	**3,142714**	**3,141873**

Un metodo di calcolo manuale per trovare il raggio richiesto dal terzo quesito di questo lancio è quindi quello di calcolarsi, con il metodo sopra descritto, il valore di π fino alla quinta cifra decimale e precisamente π = circa 3,14159 e poi, dato che la circonferenza del goniometro è lunga 1.296.000 metri, si ricava il raggio r = 206264 metri che differisce da quello esatto meno di un metro.