Questo problema è stato risolo da Emanale Burei alcuni mesi dopo il lancio avvenuto il 14/5/2005. nel 2006 ho messo il lancio nell’archivio senza la soluzione che era però stata esposta per un paio di mesi. Ora, poiché da alcune parti mi si chiede di rivedere questa soluzione, ho deciso di riesporla assieme al testo del problema. Eccoli quindi nuovamente:

******14/05/05**

UN DIFFICILISSIMO SOLITARIO

MANCA UN SOLO MESE ALLA FINE DELL'ANNO SCOLASTICO. GLI ALUNNI DELLE CLASSI QUINTE SI STANNO PREPARANDO AGLI ESAMI DI MATURITA' E GLI ALTRI SONO IMPEGNATISSIMI NELLA RICERCA DI VOTI POSITIVI NELLE ULTIME VERIFICHE. NON E' QUINDI QUESTO IL MOMENTO PIU' FAVOREVOLE PER LANCIARE UN DIFFICILE QUESITO, MA IL LANCIAPROBLEMI SI RIVOLGE ANCHE AL MONDO ESTERNO ALLA SCUOLA E PERCIO' PROPONGO QUESTO "LANCIO" NELLA CERTEZZA CHE ANCHE FRA I NOSTRI ALUNNI PIU' BRAVI QUALCUNO TROVERA' IL TEMPO PER AFFRONTARLO E RISOLVERLO.

Un difficilissimo solitario, che non mi è mai riuscito, è il seguente:

1°) Si prende un normale mazzo di 40 carte da briscola, formato da bastoni,spade, coppe e denari, nel quale le 10 carte di ogni seme hanno valori diversi compresi fra 1 e 10;
2°) Si mischiano le carte e si tiene il mazzo capovolto in modo da non riconoscere le carte;
3°) si gira la prima carta e si dice "uno", poi si gira la seconda e si dice "due" e così via fino al "dieci" per poi ricominciare con "uno";
4°) Il gioco continua solo se la carta girata presenta un numero diverso da quello che si è pronunciato. Se la carta girata ha lo stesso numero pronunciato dal giocatore il gioco finisce ed il solitario è fallito. Il solitario avrà quindi successo solo se si potranno girare tutte le carte del mazzo senza mai trovarne una con il numero uguale a quello che si è pronunciato.

La domanda che si pone è la seguente:

"QUALE E' LA PROBABILITA' DI RIUSCITA DI QUESTO SOLITARIO ?".

Ed ecco la soluzione di Emanuele Burei :

La soluzione del problema si può ottenere costruendo una funzione PV a quattro argomenti di dominio Z^4 definita nel modo seguente:

0. Se $i<0$ o $j<0$ o $k<0$ o $l<0$, $PV(i,j,k,l) = 0$.
1. $PV(0,0,0,0) = 1$
2. $PV(n,0,0,0) = (n-1)(PV(n-1,0,0,0)+PV(n-2,0,0,0))$

3. $PV(m,n,0,0) = (m+n-3)PV(m,n-1,0,0)+4(n-1)PV(m,n-2,0,0)+(m-n)PV(m-1,n-1,0,0)$
4. $PV(p,m,n,0) = (p+m+n-5)PV(p,m,n-1,0)+9(n-1)(PV(p,m,n-2,0)+4(m-n)PV(p,m-1,n-1,0)+(p-m)PV(p-1,m,n-1,0)$
5. $PV(q,p,m,n) = (q+p+m+n-7)PV(q,p,m,n-1)+16(n-1)PV(q,p,m,n-2)+9(m-n)PV(q,p,m-1,n-1)+4(p-m)PV(q,p-1,m,n-1)+(q-p)PV(q-1,p,m,n-1)$

Con $q,p,m,n>0$.

Si dovrebbe vedere facilmente (più o meno…) che la funzione PV è calcolabile in modo effettivo per qualunque quadrupla di argomenti che appartengano al dominio (le funzioni di base[1] sono definite in [0] e [1], le altre sono tutte definite a partire da funzioni con almeno un argomento inferiore e gli altri argomenti inferiori od uguali).

La soluzione corrisponde a $PV(10,10,10,10)/40!$.

PV sta per quella che avrei pensato di chiamare “permutazione variata”. Per precisare il significato che attribuirò a questa espressione, introduco una distinzione tra “elementi” e “tipi”[2]: gli elementi sarebbero singoli individui concreti, i tipi sarebbero delle forme astratte tali che ciascun elemento esemplifica una ed una sola di esse (una distinzione del genere è importante, ad esempio, quando si vuole distinguere tra una specifica lettera “A” che compare in un testo e il carattere “A”). In questo modo dovrei riuscire ad evitare ambiguità parlando del “numero di elementi di una sequenza”, laddove altrimenti non sarebbe sempre chiaro se si debbano intendere “singoli elementi” o “tipologie di elementi”. Dirò che in una sequenza un certo tipo è “ripetuto 1, 2, …, n volte” se e solo se in quella sequenza vi sono 1, 2, …, n elementi di quel tipo; dirò anche che due elementi dello stesso tipo sono “gemelli”. Dunque, per esempio, nel problema in questione le singole carte sono gli elementi e i valori numerici di esse (a prescindere dal seme) sono i tipi.
Definisco “permutazione variata” di n elementi (di $m \leq n$ tipi diversi) che formano una determinata sequenza S, qualunque sequenza PV contenente tutti e soli quegli elementi e tale che, se nella i-esima posizione di S compare un elemento A, allora nella i-esima posizione di PV compare un elemento che non è né A né un gemello di A.
Se $i \geq j \geq k \geq l$, $PV(i,j,k,l)$ è il numero delle permutazioni variate ottenute a partire da una sequenza di $i+j+k+l$ elementi di i tipi diversi, di cui esattamente i compaiono ripetuti almeno una volta, esattamente j compaiono ripetuti almeno due volte, esattamente k compaiono ripetuti almeno tre volte, ed esattamente l compaiono ripetuti almeno quattro volte (e quindi esattamente l compaiono ripetuti esattamente quattro volte, esattamente k-l compaiono ripetuti esattamente tre volte, esattamente j-k compaiono ripetuti esattamente due volte, ed esattamente i-j compaiono ripetuti esattamente una volta)[3]. Ad esempio, $PV(10,7,7,5)$ è il numero delle permutazioni variate di 29 elementi di 10 tipi diversi, di cui 5 compaiono ripetuti esattamente 4 volte, 2 compaiono ripetuti esattamente 3 volte e 3 compaiono ripetuti esattamente una volta (un seme fino al 5, due fino al 7 e l’ultimo completo).

[1] Avvertenza per puristi, cruscanti e azzeccagarbugli vari: in teoria della ricorsività, si parla di “funzioni di base” in un senso tecnico preciso nel contesto delle funzioni ricorsive, le quali, a differenza di PV, sono definite in generale in N^m (dove m è un numero naturale maggiore di 0). Trascurando questa differenza, il senso in cui parlo qui di “funzioni di base” corrisponde esattamente alla stessa idea intuitiva (benché il termine, dunque, non possieda esattamente lo stesso significato).
[2] Corrispondente a quella che in semiotica è la distinzione tra tokens e types.
[3] Naturalmente, nel caso non valga la condizione $i \geq j \geq k \geq l > 0$, quest’idea intuitiva non trova alcuna corrispondenza nello schema riportato sopra: illustrerò questo fatto nelle precisazioni finali.

Ovviamente, al fine di determinare il numero delle permutazioni variate, contano solo il numero dei tipi rappresentati nella sequenza iniziale e il numero degli elementi per ciascun tipo, e non la sequenza iniziale stessa (ossia, per esempio, calcolare le permutazioni variate partendo da ABCABC o da BCCABA non muta il risultato).

Provo a spiegare le sette equazioni che costituiscono lo schema precedente:

[0]: È scelta in modo del tutto arbitrario (cfr. le precisazioni finali).

[1]: È scelta in modo tale da ottenere il valore corretto di PV(2,0,0,0) e PV(1,1,0,0) mantenendo com'è la restante parte dello schema (in un qualche vago senso "filosofico", si potrebbe forse dire che la sequenza nulla è già una permutazione variata di se stessa…).

[2]: Fra le permutazioni variate che si ottengono a partire da n elementi in una data sequenza iniziale S, tutti di tipi diversi, compaiono tutte le sequenze che si ottengono dalle permutazioni variate di una sequenza formata da n-1 elementi degli n iniziali sostituendo a ciascuno di essi il restante elemento I (la cui posizione iniziale in S è la i-esima) e spostando quello rimpiazzato nella i-esima posizione ((n-1)PV(n-1,0,0,0) sequenze); inoltre, poiché nelle sostituzioni precedenti l'elemento rimpiazzato non si trovava mai nella propria posizione iniziale, vanno aggiunte a queste tutte le sequenze che si ottengono da S quando I si scambia di posto con uno degli altri elementi (si hanno n-1 possibilità) e successivamente si effettua una permutazione variata della sequenza formata dagli n-2 elementi restanti ((n-1)PV(n-2,0,0,0) sequenze).

[3]: Fra le permutazioni variate di m+n elementi di m tipi diversi, di cui n ripetuti esattamente 2 volte e m-n ripetuti esattamente una volta, in una data sequenza iniziale S, compaiono le sequenze che si ottengono dalle permutazioni variate di una sequenza formata da m+n-1 elementi di m tipi diversi, di cui n-1 ripetuti esattamente 2 volte e m-n-1 ripetuti esattamente una volta, inserendo il restante elemento I al posto di ciascuno degli altri elementi e spostando l'elemento rimpiazzato nella posizione iniziale di I (la i-esima); vanno però esclusi due casi per ciascuna permutazione variata: quello in cui I si verrebbe a trovare nella posizione iniziale del proprio gemello I' e quello in cui andrebbe a rimpiazzare I', il quale quindi finirebbe nella i-esima posizione (i due casi non possono coincidere, perché altrimenti non si partirebbe da una permutazione variata). Si tratta dunque di (m+n-1[il numero degli elementi eccetto I]-2[il numero degli elementi che I non può rimpiazzare in ciascuna permutazione variata])PV(m,n-1,0,0)[il numero delle permutazioni variate prese in esame] sequenze di cui tener conto. Poiché queste sequenze si ottengono a partire da permutazioni variate, in cui dunque ogni elemento che si scambia di posto con I si trovava in una posizione diversa dalla propria posizione iniziale o da quella di un proprio gemello, ad esse si devono aggiungere quelle sequenze ottenute a partire da S spostando I nella j-esima posizione, inizialmente occupata da J, portando poi J o un suo gemello J' nella i-esima posizione (nel secondo caso, J andrebbe a finire nella j'-esima posizione, senza che questo alteri le successive permutazioni variate, poiché si tratta della posizione di un suo gemello, dove comunque non potrebbe restare) e infine facendo la permutazione variata della sequenza formata da tutti gli elementi che si trovano in posizioni diverse dalla j-esima o dalla i-esima (m+n-2 elementi). Nel caso J abbia un gemello J', avremo dunque 4[2 diversi elementi dello stesso tipo, J e J', nella cui posizione iniziale I può andare a finire, la j-esima e la j'-esima, in ciascuno dei quali casi ciascuno di quei 2 elementi può occupare la i-esima posizione](n-1)[il numero di tipi i cui elementi I va a rimpiazzare, cioè quelli ripetuti esattamente due volte, meno il tipo di I stesso]PV(m,n-2,0,0)[il numero delle permutazioni variate prese in esame: tolto I, vi è un tipo in meno che risulta ripetuto esattamente 2

volte, quello di J e J', poiché o J o J' resta fisso nella i-esima posizione] sequenze di cui tener conto. Infine, nel caso J non abbia alcun gemello, avremo (m-n)[il numero di tipi i cui elementi I va a rimpiazzare, in questo caso coincidente anche con il numero degli elementi]PV(m-1,n-1,0,0)[il numero delle permutazioni variate prese in esame: tolto I, vi è un tipo in meno che risulta ripetuto esattamente una volta, quello di J] sequenze di cui tener conto.

[4]: Si ragiona analogamente a [3], solo che ora si hanno anche elementi con 2 gemelli (almeno I stesso).

[5]: Si ragiona analogamente a [3] e [4], solo che ora si hanno anche elementi con 3 gemelli.

Ho svolto i calcoli con due file distinti di Excel: nel primo ho utilizzato le operazioni normali del programma, nel secondo ne ho utilizzate alcune rese possibili da un'add-in di Excel (xlPrecision) che ho acquistato on-line e che mi ha consentito di ottenere il valore preciso di PV(10,10,10,10) con tutte le cifre decimali. Nella prima delle quattro colonne a sinistra ho riportato una singola serie dei numeri da 0 a 10 ripetuti ciascuno 1331 volte consecutive, nella seconda colonna ho riportato 11 serie di tali numeri ripetuti ciascuno 121 volte consecutive, nella terza ho riportato 121 serie di questi numeri ripetuti ciascuno 11 volte consecutive, e infine nella quarta ho riportato 1331 serie dei suddetti numeri senza ripetizioni consecutive: in tal modo, ho ottenuto una successione ordinata, senza ripetizioni, di tutte le combinazioni di quattro numeri compresi tra 0 e 11, tra cui, ovviamente, tutte le quadruple di argomenti per la funzione PV che mi servivano. La mia "traduzione" delle equazioni [2]-[5] dello schema si trova nei comandi corrispondenti alle celle F2663-I2663 (quelle relative a PV(2,0,0,0), la permutazione variata "più piccola" diversa dalla sequenza nulla): nei comandi in G2663-I2663 ho usato una formula condizionale, in modo da "recuperare" in ciascuna colonna i valori della funzione calcolati nella colonna precedente. Nella cella I14641 compare il valore di PV(10,10,10,10) e nella cella I14643 la soluzione (in entrambi i casi, nel primo file risulta approssimata per eccesso l'ultima cifra restituita, mentre le altre corrispondono tutte ai valori precisi calcolati nel secondo file). In generale, nella colonna I compaiono tutti i valori di PV per gli argomenti compresi tra 0 e 10.

La soluzione estesa (a meno naturalmente di errori concettuali o di calcolo) è questa:

127458766011597474237479783023882205279299829 76/
815915283247897734345611269596115894272000000000,

pari circa ad 1,56%.

Anche se lo schema con cui ho definito PV muterebbe, il ragionamento precedente, posto che sia corretto, si applica in maniera naturale pure a problemi analoghi in cui varia soltanto il numero dei semi e/o delle carte disponibili per ciascun seme.

Precisazioni

Come ho già fatto notare, non tutte le funzioni che si ricavano dallo schema hanno un corrispondente intuitivo nelle permutazioni variate così come le ho descritte. Il motivo per cui ciò accade è che ho deciso di costruire lo schema con cui è definita PV nella maniera che mi sembrava la più economica possibile: se avessi mantenuto una perfetta coincidenza tra la definizione di PV e l'intuizione che la fondava, avrei dovuto aumentare il numero delle equazioni, complicando ulteriormente la spiegazione della soluzione. Le tipologie dei casi in cui la corrispondenza con l'intuizione viene meno sono, mi pare, soltanto tre. (Nel seguito, parlerò di funzioni "interessanti" intendendo, grossomodo, quelle funzioni PV che corrispondono al numero di permutazioni variate di una determinata sequenza; parlerò di funzioni "devianti" altrimenti.)

1) Funzioni con argomenti negativi.

Se PV(i,j,k,l) ha almeno un argomento negativo, in base a [0], il suo valore è convenzionalmente 0 (ma avrebbe potuto essere benissimo qualunque altro). La ragione per cui nello schema compare [0] è che alcune funzioni interessanti sono definite a partire, tra le altre, da funzioni con argomenti negativi. Un esempio è PV(2,1,1,0) = -1PV(2,1,0,0)+9·0PV(2,1,-1,0)+4·0PV(2,0,0,0)+1PV(1,1,0,0).
In tutti questi casi, peraltro, l'addendo in cui compare una funzione con argomenti negativi si annulla. Come si vede dallo schema, ciò accade solo quando n=1, perché compare una funzione che ha come argomento n-2; in tal caso, tuttavia, tale funzione è sempre moltiplicata per n-1, che è uguale a 0.

2) Funzioni PV(i, j, k, l) per cui non vale la condizione i≥j≥k≥l.

Anche in questo caso, ci sono funzioni interessanti definite a partire da funzioni che non rispettano la precedente condizione. Un esempio è PV(5,5,3,0) = 8PV(5,5,2,0)+9·2PV(5,5,1,0)+4·2PV(5,4,2,0)+0PV(4,5,2,0).
Di nuovo, in tutti i casi interessanti, l'addendo in cui compare la funzione deviante si annulla. Se infatti una funzione PV(i, j, k, l) per cui vale i≥j≥k≥l è definita a partire da una funzione per cui i≥j≥k≥l non vale, ciò può accadere soltanto perché, come si evince dallo schema, q=p o p=m o m=n; ma in ciascuna di queste circostanze, la funzione deviante è moltiplicata, rispettivamente, per q-p o p-m o m-n, ossia per 0[4].

3) Funzioni definite per mezzo di funzioni moltiplicate per numeri negativi.

Un esempio è ancora PV(2,1,1,0)=-1PV(2,1,0,0)+9·0PV(2,1,-1,0)+4·0PV(2,0,0,0)+1PV(1,1,0,0).
Nuovamente, in tutti i casi interessanti, l'addendo in cui compare il fattore negativo si annulla. Ciò accade, infatti, precisamente per PV(1,0,0,0), PV(1,1,0,0), PV(1,1,1,0), PV(1,1,1,1), PV(2,1,0,0), PV(2,1,1,0), PV(2,1,1,1), PV(2,2,1,0), PV(2,2,1,1), PV(3,1,1,0), PV(3,1,1,1). Si tratta di tutti i casi interessanti pari a 0 ad eccezione di PV(2,2,2,1), PV(3,2,1,1) e PV(4,1,1,1)[5].

Se si considerano i precedenti casi "limite" alla luce delle spiegazioni che ho fornito per le equazioni, ci si rende facilmente conto che, benché non esplicitamente considerato per ragioni di brevità, l'annullamento di uno o più addendi è esattamente conforme al significato intuitivo di tali casi.

[4] Nei casi, invece, in cui già la funzione da definirsi è deviante, ciò può anche non accadere; ma il risultato, comunque, non ci interessa minimamente, proprio perché si tratta di un caso in cui la funzione non ha alcuna controparte intuitiva.

[5] I valori della funzione PV sono uguali a 0 nei casi interessanti se e soltanto se il numero degli argomenti diversi da 0 è maggiore della semisomma di tali argomenti: in questo caso, infatti, esiste un unico tipo rappresentato da un numero di elementi maggiore di quello degli elementi che li possono rimpiazzare.