Soluzione del lancio del *Lanciaproblemi* del 28 dicembre 2008

Emanuele Burei

Il teorema su cui verte questo scritto è in risposta a un quesito che compare al seguente link:
http://www.liceodaponte.com/public/LanciaProb/1238400889.pdf?PHPSESSID=1645085488e850944fc333fc53b9a57c

Convenzioni.

Tutte le variabili numeriche si intendono variare sull'insieme dei numeri naturali.

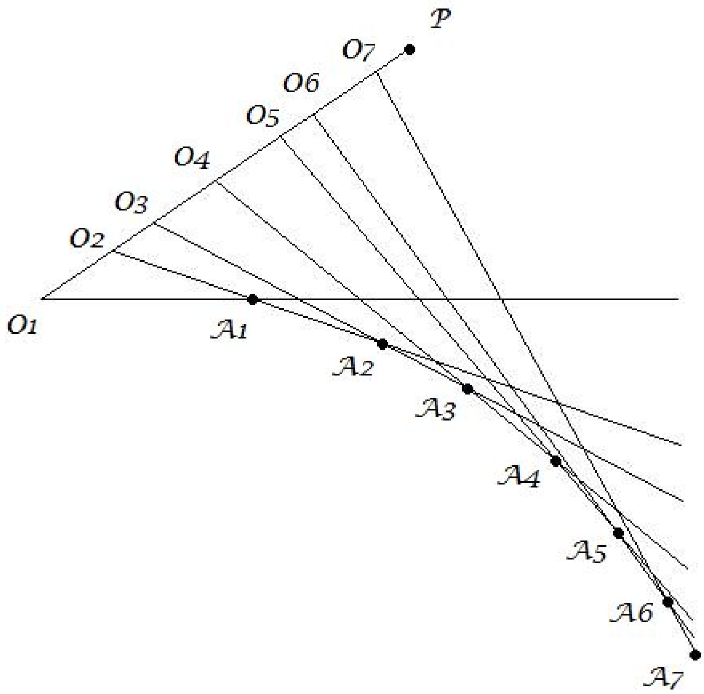
Se A, B e C sono tre punti del piano, indicherò con AB la retta che attraversa A e B, con $[AB]$ il segmento avente per estremi A e B e con ABC l'angolo avente per vertice B e i cui lati passano rispettivamente per A e per C.

Teorema. Dato n (con $n \geq 2$), esistono infiniti insiemi Ξ di $2n$ punti del piano tali che non vi è alcuna poligonale formata al più da n segmenti che congiunga tutti i punti di Ξ.

Dimostrazione (schema).

Si consideri innanzitutto un angolo PO_1A_1. Si scelgano poi nel piano altri $2n - 2$ punti A_i (con $2 \leq i \leq 2n - 1$) tali che il punto d'intersezione O_i tra A_iA_{i-1} e PO_1 sia interno a $[PO_{i-1}]$ e A_i giaccia, rispetto ad $A_{i-1}O_{i-1}$, nel semipiano in cui giace O_1. [1]

Un insieme di punti che si può ottenere in questo modo è rappresentato nella figura seguente (in cui $n = 4$).



1 È immediato ricavare da questa descrizione una procedura effettiva per ottenere un simile insieme di punti.

Nel seguito, vale che $1 \leq i, j, h \leq 2n - 1$.

Si consideri ora l'insieme Λ di punti formato da P e da tutti gli A_i. Si può provare che Λ soddisfa la condizione richiesta dall'enunciato del teorema.

Qui mi limito a delineare lo scheletro della dimostrazione.

Per induzione matematica, si dimostra che non esistono tre punti A_i, A_j e A_h allineati; si dimostra inoltre che non esistono due punti A_i e A_j tali che A_i, A_j e P siano allineati. In generale, dunque, non vi sono tre punti di Λ allineati.

Si supponga, per assurdo, che esista una poligonale s in grado di congiungere tutti i punti di Λ. In tal caso, ciascuno dei segmenti che la compongono dovrebbe contenere due punti di Λ che non siano contenuti in nessun altro segmento di s. Infatti, non essendovi tre punti di Λ allineati, ne deriva che ciascun segmento di s contiene al più due punti di Λ, e nello stesso tempo al più n segmenti dovrebbero congiungere $2n$ punti.

Sempre per induzione matematica, si prova infine che, data una qualunque retta PA_i, PA_i incontra ogni segmento $[A_j A_h]$ tale che $j < i < h$, mentre ogni retta $A_j A_h$ incontra $[PA_i]$ se $j, h < i$ o $j, h > i$. Da ciò deriva che non vi sono due segmenti consecutivi che contengano quattro punti di Λ tra cui P, col che l'ipotesi che esista s è confutata e il teorema dimostrato.

Marostica, 1 maggio 2009

Emanuele Burei
Vl. Stazione, 30
36063 Marostica (VI)
Italy

E-mail: emanuele.burei@tin.it