13/03/2009

UN OTTIMO ALLENAMENTO SUI RADICALI

L'ultima competizione delle gare di ALPEADRIA ha visto la partecipazione di sei licei scientifici italiani e stranieri. Hanno partecipato il liceo J. Da Ponte di Bassano del Grappa, Il liceo Marinelli di Udine, Il liceo sloveno di Nova Gorica, quello austriaco di Villach , quello croato di Opatija e quello romeno di Timisoara.

Il nostro liceo ha vinto la competizione ma è arrivato secondo nella gara di matematica vinta dal liceo Marinelli di Udine.
Nelle gare di matematica ad ogni liceo è stato assegnato un argomento sul quale preparare sei quesiti e due di questi, scelti a caso, sono stati poi messi in gara. La prova era quindi articolata in 12 quesiti che spaziavano su tutto il programma normalmente svolto nei primi quattro anni del quinquennio liceale.

La nostra scuola era incaricata di predisporre sei quesiti sui radicali e sulle potenze ad esponente razionale, quesiti che ora espongo per dare a tutti l'opportunità di mettersi alla prova scegliendo la risposta esatta fra quelle indicate.

Primo quesito:

Se $y = \sqrt[3]{a}\sqrt{b}\sqrt[3]{b}\sqrt{-a}$ **si dica quale delle seguenti uguaglianze è corretta:**

a) $y = \sqrt[6]{(-a)^5 b^5}$

b) $y = -\sqrt[6]{a^5 b^5}$

c) $-y = \sqrt[6]{(-a)^5 b^5}$

d) $y = \sqrt[6]{a^5 (-b)^5}$

e) nessuna delle precedenti uguaglianze è corretta.

Secondo quesito:

Se $y = (\sqrt{3} - 2)\sqrt{\left(\sqrt{3} + 2\right)}$ **si dica quale delle seguenti uguaglianze è corretta:**

a) $y = \sqrt{\sqrt{3} - 2}$

$y = -\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)}$

b)

$y = \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{\sqrt{3}-2}}$

c)

d) $y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

e)nessuna delle precedenti uguaglianze è corretta.

Terzo quesito:

Se $y = \sqrt{0{,}008^{-2}} + \sqrt[4]{0{,}0081^{-3}} + \sqrt{1{,}44^{-1}}$ **si indichi la relazione corretta:**

a) y>63; **b**)y<62; **c**)y=62; **d**) 62<y<63; **e**) nessuna delle precedenti è corretta.

Quarto quesito:

Si dica a quali condizioni risulta:

$$\sqrt{\frac{1}{y^2}\sqrt[3]{\frac{1}{a}}} = y^{-1}a^{-\frac{1}{6}}$$

a) Per qualsiasi valore reale di a e di y;
b) Solo se a >=0
c) Solo se a>0
d) Solo se a>0 e y>0;
e) Nessuna delle condizioni precedenti;

Quinto quesito:

Se $y = (\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$ **si indichi l'affermazione corretta fra le seguenti:**

a) y è un numero intero positivo;
b) y è un numero irrazionale ;
c) y è un numero intero negativo;
d) -2<y<2;
e) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta;

Sesto quesito:

Dire in quale caso fra quelli indicati risulta $\sqrt[4]{y^2+y+\frac{1}{4}} = \sqrt{y+\frac{1}{2}}$ **:**

a) Per ogni valore reale di y;
b) Solo se y>=0;
c) solo se y > -1/2
d) solo se y>0
e) In nessuno dei casi precedenti.

Aspetto le risposte al solito indirizzo tonipulita@hotmail.com e vi informo che uno dei due quesiti scelti per la gara è stato sbagliato da tutti i 18 rappresentanti delle varie scuole.

Pasqua 2009, è passato quasi un mese e la risposta migliore me l'ha inviata Elena Salami della 3^F. Elena ha risposto esattamente a tutti i quesiti ed è stata veramente brava. Complimenti a lei.

Le soluzioni dei sei quesiti sono le seguenti:

Primo quesito:

Il C.E. del primo membro impone $b \geq 0; a \leq 0$ e perciò risulta $y \leq 0$.

Le risposte a) e d) sono sbagliate perchè in esse risulta $y \geq 0$;
La risposta b) è sbagliata perchè presenta un radicale di indice pari con radicando negativo;

La risposta esatta è la C) perchè se $b \geq 0; a \leq 0$ risulta:

$$\sqrt[3]{a} = -\sqrt[6]{a^2}; \sqrt{b} = \sqrt[6]{b^3}; \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b^2}; \sqrt{-a} = \sqrt[6]{(-a)^3} \Rightarrow \quad y = -\sqrt[6]{-a^5 b^5}$$

Secondo quesito:

Il fattore esterno $\sqrt{3} - 2$ è negativo e si vede quindi che le risposte a);c);d) sono sbagliate perchè presentano radicandi negativi che fanno perdere significato alle scritture da esse rappresentate. La risposta esatta è la b) perchè è stata ottenuta correttamente mantenendo il segno negativo fuori dal radicale e "portando dentro radice" il fattore positivo $(2-\sqrt{3})^2$ ottenendo $y = -\sqrt{(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})} = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Terzo quesito:
La risposta esatta è la d) perché:

$$\sqrt[3]{0{,}008^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{8}\right)^2} = 25 \; ; \quad \sqrt[4]{0{,}0081^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{10^{12}}{3^{12}}} = \frac{1000}{27} \; ; \quad \sqrt{1{,}44^{-1}} = \sqrt{\frac{100}{144}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \; ;$$

ed allora $y = 25 + \frac{1000}{27} + \frac{5}{6} = \frac{3395}{54} \cong 62{,}87037037.....$

Quarto quesito:
Questo è il quesito che tutti i 18 alunni in gara hanno sbagliato.

La risposta esatta è infatti la d) perché il primo membro impone le condizioni a>0 e $y \neq 0$ ma poi, dato che il primo membro è positivo, deve esserlo anche il secondo. Le due condizioni si realizzano solo se a>0 e y>0. La risposta che quasi tutti hanno dato è la c) ma si può capire che è sbagliata anche ponendo y= - 2 ed $a = \frac{1}{64}$. Con questi valori risulterebbe 1 = - 1.

Quinto quesito:

La risposta esatta è la c). Si tratta di un classico prodotto notevole del tipo

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ Che nel nostro caso offre y=3 - 5= - 2.

Sesto quesito:

La risposta esatta è la e) infatti nella sequenza di uguaglianze:

$\sqrt[4]{y^2 + y + \frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left|y + \frac{1}{2}\right|} = \sqrt{y + \frac{1}{2}}$ l'ultima di esse è corretta solo se $y \geq -\frac{1}{2}$ e questa condizione non è espressa da nessuna delle risposte precedenti.

N.B.

A giorni esporrò gli altri quesiti della gara di Alpeadria 2009