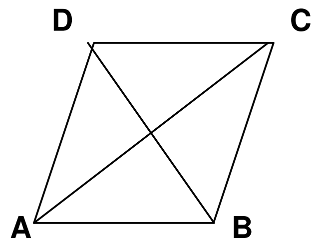
22/4/2008

IL TEOREMA DI MENARA



Più di trenta anni fa insegnavo matematica presso la scuola media di Breganze e un giorno, parlando del parallelogramma, invitai la classe a cercare le sue proprietà. Quando mi parve che fossero state individuate e dimostrate tutte dissi che avrei premiato con un bel 10 chiunque ne avesse trovata e dimostrata una di nuova. L'alunno Menara, del quale ricordo solo il cognome, si alzò dopo qualche minuto e disse di averla trovata. La cosa mi incuriosì perché Menara non era uno che interveniva senza essere sicuro di quel che diceva.

Avevamo già dimostrato che se in un quadrilatero i lati opposti sono paralleli allora:

- **I lati opposti sono congruenti;**
- **Gli angoli opposti sono congruenti;**
- **Ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti;**
- **Le diagonali si tagliano a metà;**
- **Gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari;**

Avevamo già dimostrato che se in un quadrilatero risulta vera una sola di queste proprietà allora tutte le altre erano altrettanto vere.

Avevamo già dimostrato che se in un quadrilatero due lati opposti sono paralleli e congruenti allora quel quadrilatero è un parallelogramma.

Cosa poteva aver trovato di nuovo questo alunno, anche se era notoriamente molto bravo?

Menara disse che i quattro triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalle sue diagonali hanno la stessa area e quindi, anche se non sono tutti e quattro congruenti sono però tutti e quattro equivalenti.

Da quel giorno quella proprietà l'ho chiamata TEOREMA DI MENARA e con questo nome l'ho sempre fatta aggiungere alle altre contemplate nei libri di testo.

Agli alunni del liceo Scientifico, dove ho insegnato negli ultimi 20 anni, chiedevo però anche di provare a dimostrare il teorema inverso perché in quel caso si sarebbe dimostrato che quella proprietà è equivalente a tutte le altre sopra elencate.

Oggi Il "lanciaprobemi" pone quindi le seguenti questioni:

1°) Dimostrare il TEOREMA DI MENARA che dice:
"I quattro triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalle sue diagonali sono equivalenti";

2°) Verificare se il TEOREMA DI MENARA è invertibile. Dire quindi se è vero o falso che " se un quadrilatero è diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti allora quel quadrilatero è un parallelogramma."

Le soluzioni vanno inviate al solito indirizzo tonipulita@hotmail.com

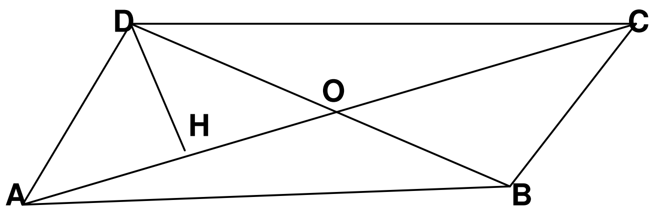
Oggi è il giorno 29/4/08 e gli alunni De Nardi Laura, Tescari Sara e Schirato Lorenzo, che frequentano la classe 1^H del nostro liceo, hanno inviato, già da alcuni giorni la soluzione corretta che ora, in forma equivalente, espongo qui sotto.

Teorema diretto

"I quattro triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalle sue diagonali sono equivalenti";

Dimostrazione

Con riferimento alla figura sottostante se nei triangoli AOD e COD si considerano come basi i lati AO e CO, che sono congruenti, l'altezza per entrambi è il segmento DH e quindi essi, avendo basi ed altezze congruenti, hanno anche la stessa area. Dalla congruenza di COD con AOB e di AOD con COB segue poi la equivalenza dei quattro triangoli come affermato dall'alunno Menara.



Teorema inverso

" se un quadrilatero è diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti allora quel quadrilatero è un parallelogramma."

Dimostrazione

Con riferimento alla figura se i quattro triangoli AOB-BOE-EOD-DOA sono equivalenti allora lo sono anche i due triangoli ABECed ADC aventi la base comune AC. Questi due triangoli, essendo equivalenti ed avendo la stessa base, devono avere altezze congruenti e quindi risulta DH≡BK. DH è altezza sia per il triangolo AOD che per il triangolo COD che, essendo equivalenti devono quindi avere anche le basi congruenti. Risulta quindi CO≡AO e con ciò abbiamo dimostrato che la diagonale DB passa per il punto medio della diagonale AC. In modo del tutto analogo si dimostra che anche la diagonale AC passa per il punto medio di DB e con ciò si è dimostrato che il quadrilatero, avendo le diagonali con il medesimo centro è un parallelogramma.