20/09/2008

IL TRIANGOLO 20-80-80

Il nostro modesto lanciaproblemi è onoratissimo di "lanciare" un problema che ci è stato proposto da un matematico di fama mondiale. Si tratta del prof. Gilles Christol di Parigi in onore del quale l'Università di Padova ha recentemente celebrato un meeting dal titolo:

p-adic differential equations: a conference in honor of Gilles Christol

September 6-9, 2008 - Bressanone (BZ) - University of Padua

A Bressanone ho potuto passare alcune ore con il Prof. Christol e con mio figlio Andrea, che è stato il suo ultimo allievo a Parigi ed ora era fra i relatori alla conferenza. In quella occasione mi fu preannunciato il problema che ora "lancio" riportando uno stralcio della mail con cui mi è stato spedito:

……..Approfitto dell'occasione per proporre un bel problema di matematica che circolava a Bressanone:

Sia ABC un triangolo con i due angoli ABC e ACB di 80°

Sia D il punto di AC tale che l'angolo DBC misuri 50°

Sia E il punto di AB tale che l'angolo ECB misuri 60°

Calcolare l'angolo CED...

Il problema è difficile soprattutto perché è richiesta una soluzione che usi solo geometria elementare ma è difficile anche se lo si affronta con la trigonometria. Il problema è comunque alla portata degli alunni più preparati e geniali e costituirà comunque, una volta esposta la soluzione, un ottimo esercizio di approfondimento sia per la trigonometria che per la geometria elementare. Devo dire però che per via elementare mi ha fatto impazzire!

Data la difficoltà del problema, i due alunni che per primi lo risolveranno (in almeno uno dei due modi) saranno invitati ad una serata conviviale assieme ai loro insegnanti di matematica. Sono convinto infatti che se sapranno risolvere questo problema i loro insegnanti avranno avuto una gran parte del merito.

Mandatemi quindi le soluzioni all'indirizzo tonipulita@hotmail.com

……e le soluzioni sono arrivate! Già nel giorno successivo al "lancio" sono pervenute due soluzioni per via trigonometrica. Una è stata presentata dalle due alunne Denise Marcon e Zonta Martina della classe 5^F e l'altra l'ha inviata Limberto Matteo della classe 5^E del nostro liceo. La soluzione di Denise e Martina è molto elaborata ma è perfetta e completa mentre quella di Matteo è un po' più semplice nella impostazione ma arriva ad una equazione complicata che l'autore ha risolto con l'aiuto non nobile della calcolatrice (mancavano comunque solo alcuni passaggi che Matteo sicuramente avrà già perfezionato).

Esporrò le soluzioni fra qualche giorno per dar modo a qualche altro "lanciaproblemista" di mettere alla prova la sua abilità .

N.B.

Nessuno ha ancora trovato la soluzione attraverso la geometria elementare anche se molti, come Ferraresso Francesco, hanno individuato strade interessanti che però è difficile percorrere fino in fondo. Vedremo nei prossimi giorni se riusciremo a completare l'opera anche da questo versante.

FINALMENTE !

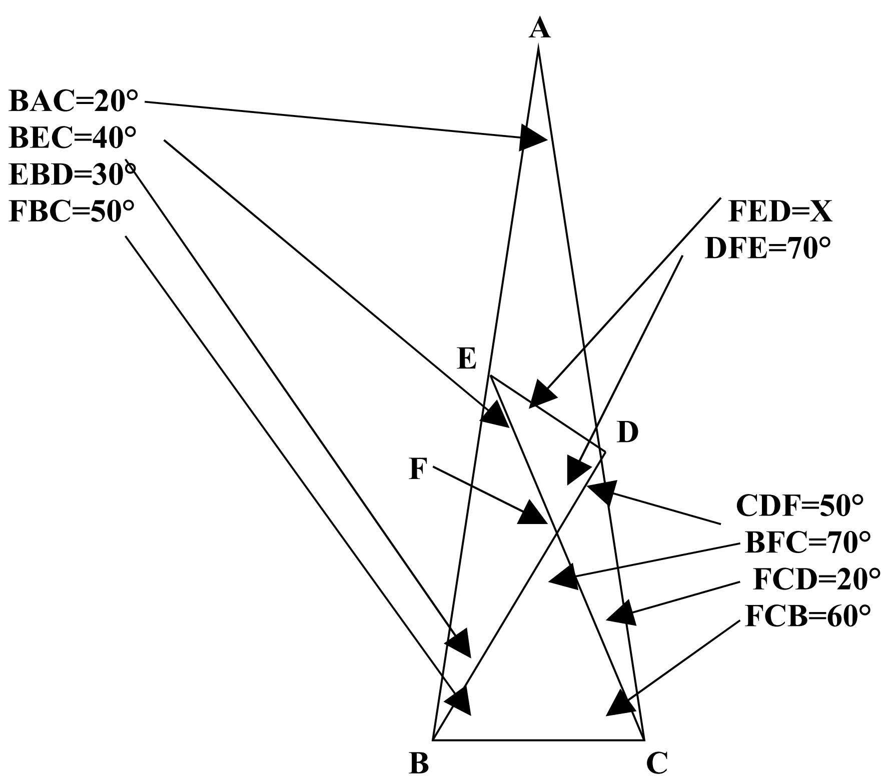
Oggi 29 Settembre.....C'è una canzone scritta da Lucio Battisti nel 1969 e cantata dall'Equipe 84 che parla di questa data ed esprime una grande gioia per un incontro d'amore.

Il 29 Settembre 2008 è ancora una data molto felice perchè nel giorno in cui la mia nipotina Giulia compiva un anno, mentre mi trovavo ad Antibes a farle da Baby Sitter, è arrivata una bellissima e sintetica soluzione ottenuta per via puramente geometrica ed inviata dal prof. Rizzotto Francesco che è il responsabile della sezione vicentina di Mathesis. Il giorno successivo è arrivata anche una seconda soluzione per via geometrica inviata dall'alunno Grego Andrea che frequenta la classe 3^C del nostro liceo. I conti con questo problema sono quindi definitivamente chiusi e si possono mostrare le soluzioni

Prima soluzione (trigonometrica)

(dalla E-Mail inviata all'autore del lancio)

Carissimo Professore, Il problema del triangolo 20-80-80 ha messo in agitazione tutto il mio vecchio liceo. Ho promesso un premio a chi lo risolverà per via trigonometrica o per via elementare ed alcuni alunni mi hanno già mandato la risposta esatta promettendomi anche la dimostrazione. Vedremo…Io ho risolto così:



Se R è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo risulta:

$CE = BC = 2Rsin(20)$ **;** $AB = AC = 2Rsin(80)$

$DA = 2Rsin(80) - 2Rsin(20) = 4R\cos(50)sim(30)\,\mathrm{Pr}\,ostaferesi = 2Rsin(40)$

Dal teorema dei seni in AEC risulta

$$\frac{AE}{sin(20)} = \frac{2Rsin(80)}{sin(140)} \Rightarrow AE = \frac{2Rsin(80)sin(20)}{sin(40)} = 2R\frac{2sin(40)\cos(40)sin(20)}{sin(40)} = 4Rsin(20)\cos(40)$$

L'equazione che risolve il problema è offerta dal teorema dei seni in DAE

$$\frac{DA}{sin(140-x)} = \frac{AE}{sin(20+x)} \Rightarrow \frac{DA}{sin(40+x)} = \frac{AE}{sin(20+x)} \Rightarrow 2Rsin(40)sin(20+x) = 4Rsin(20)\cos(40)sin(40+x)$$

$$\Rightarrow 2sin(20)\cos(20)sin(20+x) = 2sin(20)\cos(40)sin(40+x)$$

$$\Rightarrow sin(20+x)\cos(20) = sin(40+x)\cos(40)$$

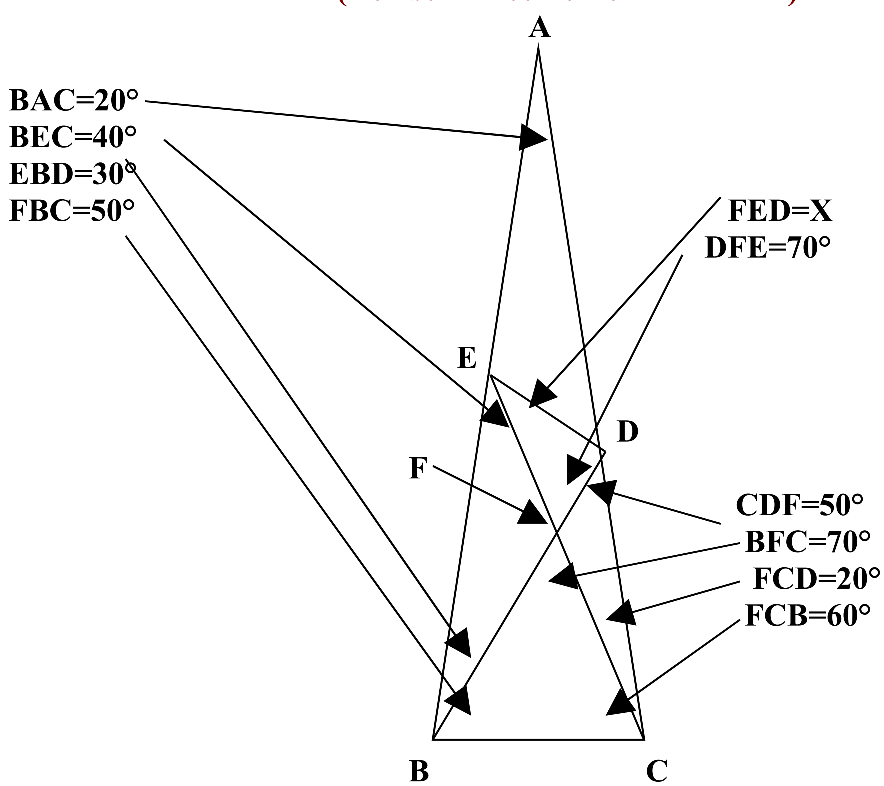
Già qui si vede bene che x=30° soddisfa l'equazione ma, applicando le formule di Werner , si può continuare così:

$$\frac{1}{2}[sin(40+x)+sin(x)] = \frac{1}{2}[sin(80+x)+sinx]$$

$$sin(40+x) = sin(80+x)$$

L'equazione si sdoppia in $40+x = 80+x+k360$ **che è impossibile, ed in** $120+2x = 180+k360$ **che offre la soluzione x=30°+k180° riducibile in x=30° nel caso geometrico che ci interessa.**
Una soluzione per via puramente geometrica si potrebbe ottenere traducendo tutti i passaggi trigonometrici che ho fatto…ma sarebbe un imbroglio. In altro modo non ci sono ancora riuscito.
Tanti saluti, Toni Pulita.

Seconda soluzione (trigonometrica)
(Denise Marcon e Zonta Martina)



Con riferimento alla figura pongo:
BC=a e quindi anche DC=a perchè BCD è isoscele
AE=b e quindi anche EC=b perchè AEC è isoscele;
AD=h; EB=d; ED=c; BD=f;

$c^2 = b^2 + h^2 - 2bh\cos(20)$ **Carnot in DEA**

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos(20)$ **Carnot in CED**

$b^2 + h^2 - 2bh\cos(20) = b^2 + a^2 - 2ab\cos(20)$

$h^2 - a^2 = 2b(h - a)\cos(20)$

$(h + a) = 2b\cos(20) = b + d$

Applico il teorema dei seni in ABC

$$\frac{h+a}{\sin(80)} = \frac{a}{\sin(20)} \Rightarrow h + a = \frac{a\sin(80)}{\sin(20)} = \frac{2a\sin(40)\cos(40)}{\sin(20)} = \frac{4a\sin(20)\cos(20)\cos(40)}{\sin(20)} = 4a\cos(20)\cos(40)$$

Applico Werner ed ottengo

$$h + a = 4a\frac{1}{2}[(\cos(60) + \cos(20)] = 2a[\frac{1}{2} + \cos(20)] = a + 2a\cos(20) \Rightarrow h = 2a\cos(20)$$

$$\frac{h+a}{h} = \frac{b+d}{h} = \frac{2b\cos(20)}{2a\cos(20)} = \frac{b}{a}$$

$f^2 = (b + d)^2 + h^2 - 2(b + d)h\cos(20)$ **Carnot in ABD**

$(\frac{f}{h})^2 = (\frac{b+d}{h})^2 + 1 - 2\frac{b+d}{h}\cos(20)$ **ma essendo** $\frac{b+d}{h} = \frac{b}{d}$ **si ottiene**

$$(\frac{f}{h})^2 = (\frac{b}{a})^2 + 1 - 2\frac{b}{a}\cos(20)$$

Moltiplico per a^2 **ambo I membri ed ottengo**

$$a^2(\frac{f}{h})^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(20) = c^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{f}{h}$$

Per il teorema dei dei seni in EDC e poi in ABD risulta

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin(x)}{\sin(20)} \quad \text{e} \quad \frac{h}{f} = \frac{\sin(30)}{\sin(20)}$$

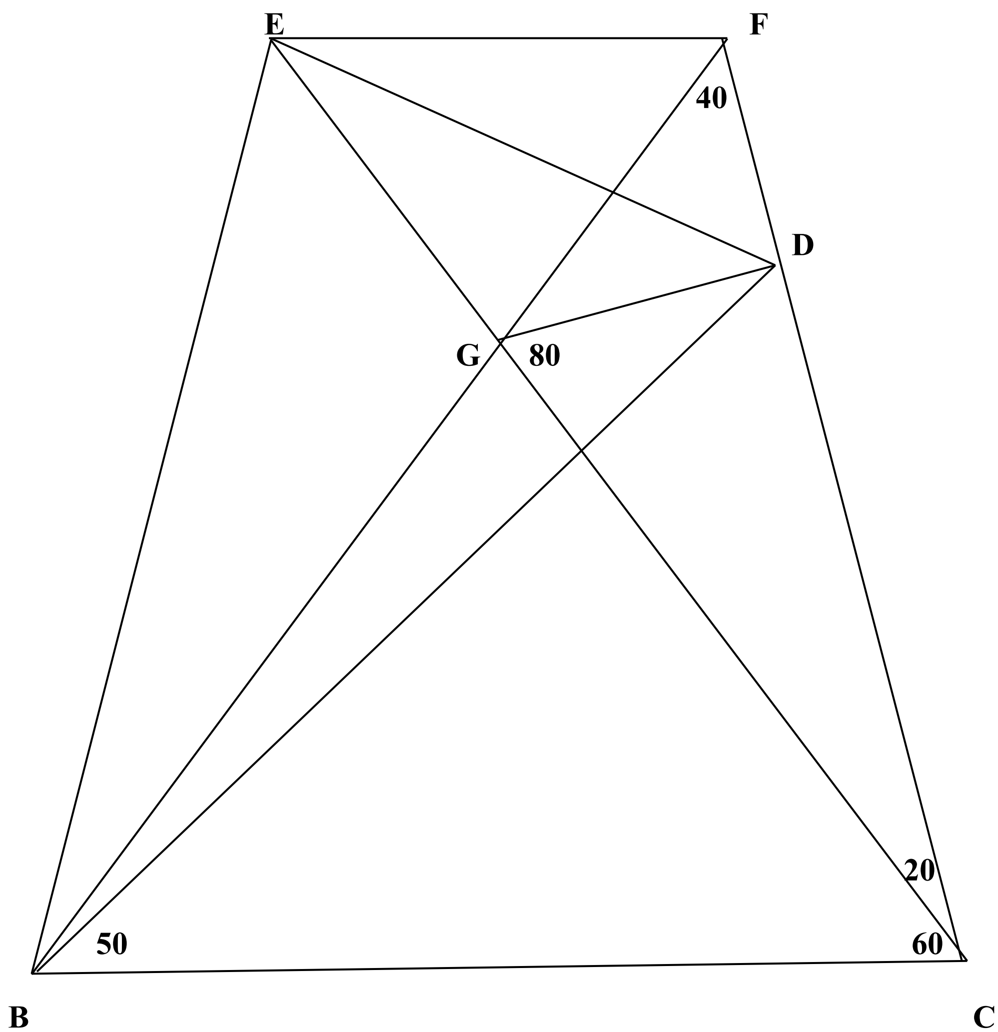
$$\frac{c}{a} = \frac{f}{c} \Rightarrow \frac{\sin(20)}{\sin(x)} = \frac{\sin(20)}{\sin(30)} \Rightarrow \sin(x) = \sin(30) \Rightarrow x = 30$$

Terza soluzione (geometrica)

(Rizzotto Francesco)

Caro Toni, ho sudato le classiche sette camicie (anche perchè imbottito di aspirine contro il mal di gola!!) provando in vari modi a risolvere l'ultimo problema.
Alla fine ho trovato una soluzione molto sintetica che mi sembra esatta.
Te la allego.
Ciao, Francesco.

Problema di settembre 2008



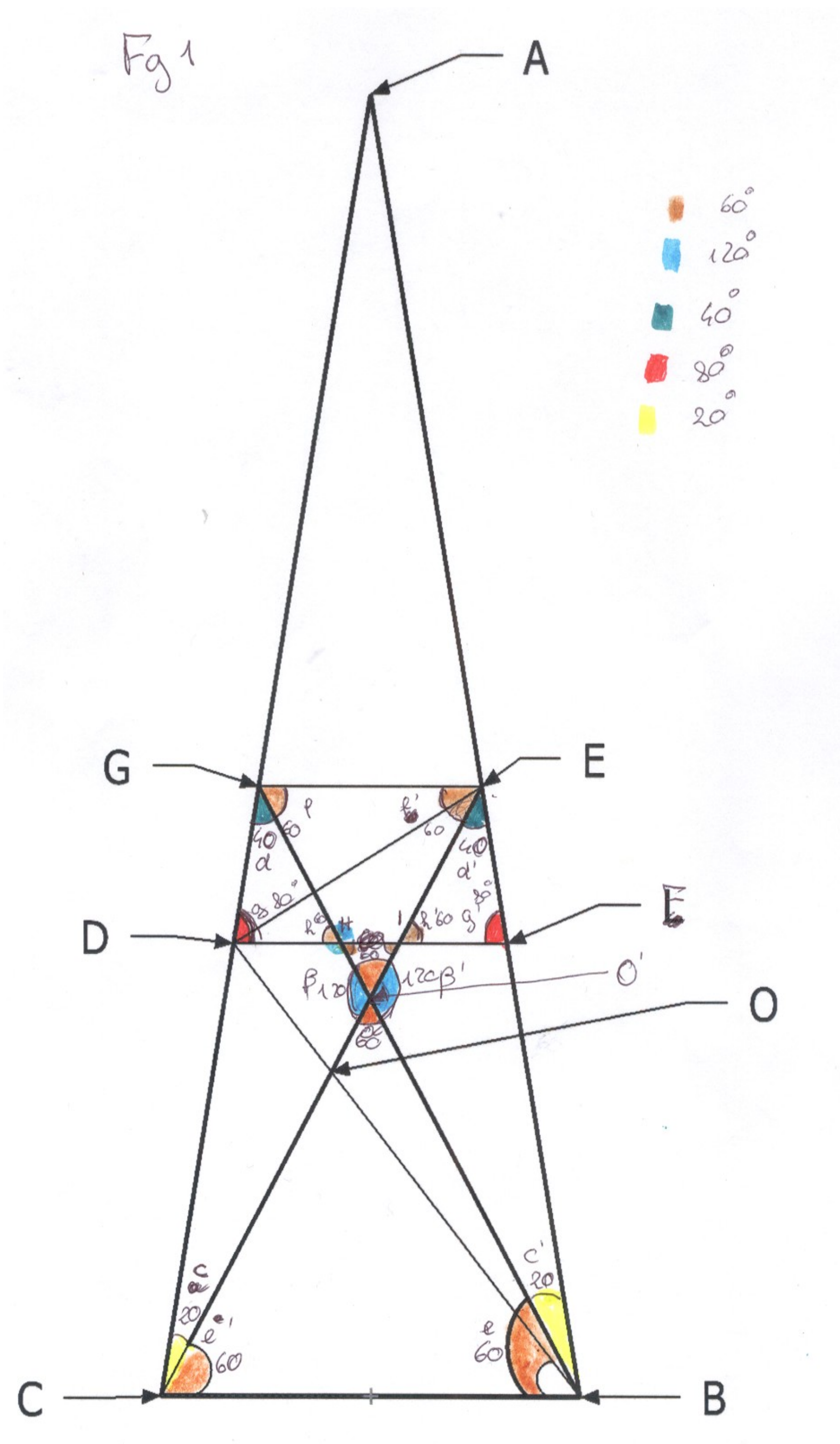
La figura è estrapolata dal triangolo ABC. **Ipotesi** $\begin{cases} E\hat{B}C = B\hat{C}D = 80^\circ \\ B\hat{C}E = 60^\circ \\ C\hat{B}D = 50^\circ \end{cases}$

Traccio EF parallela a BC.
Poiché il triangolo BCG è equilatero ed il triangolo BDC è isoscele (con base BD) allora anche CGD è isoscele e, pertanto, gli angoli in D e in G misurano 80°.
Quindi l'angolo FGD misura 40° e in tal modo il triangolo FGD risulta isoscele.
In conclusione il quadrilatero EFDG è un "deltoide" e, pertanto, la diagonale ED è bisettrice dell'angolo in E che vale 60°.

Ultima soluzione (geometrica)

(Grego Andrea)

Espongo questa elaboratissima soluzione così come è arrivata e non posso che complimentarmi con Andrea Grego che è riusito a “grattarsi l'orecchio destro usando il piede sinistro”. Non c'è dubbio che Andrea sia un fortissimo cultore dello yoga ma l'importante è che “il prurito all'orecchio sia sparito”. Queste battute mi sono venute spontanee confrontando la semplicità della soluzione di Rizzotto con la Complessità di quella di Andrea. Queste considerazioni non sminuiscono assolutamente il pregio di questa dimostrazione anche perchè Andrea è riuscito dove tutti, compreso me, hanno fallito. Sia Andrea Grego che il prof. Rizzotto hanno impiegato una settimana per arrivare al risultato e chiunque, dopo aver visto le soluzioni, ritenga che il problema sia facile, provi a ridimostrarlo anche dopo avele viste....... Complimenti ad Andrea.



Ecco la sua soluzione

Risoluzione problema triangolo

Hp: ACB=ABC= 80º
DCB=60 º
DBC=50 º

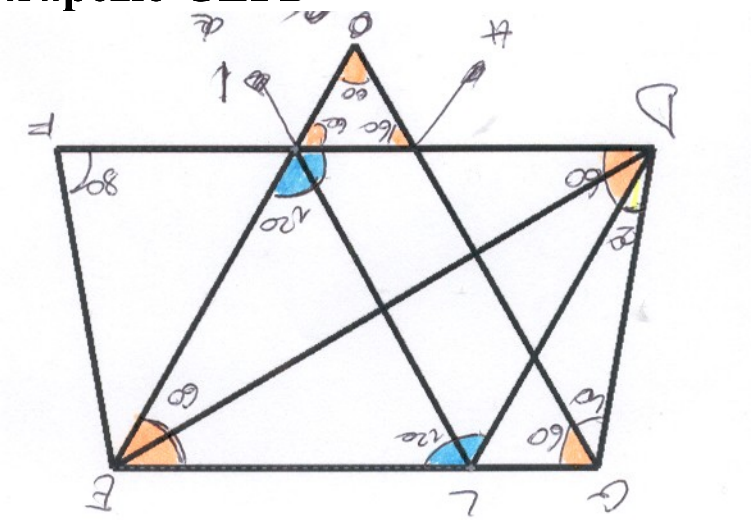
Th: DEC=?

Dimostrazione

1) **Congiungo C con E e B con D, traccio un altro angolo a partire da CB in senso orario con ampiezza di 60 º e trovo un altro punto G che è la sua intersezione con il lato AC.**
2) **Poi traccio un segmento parallelo alla base CB passante per D ed individuo il punto di intersezione F con il lato AB**
3) **Congiungo G con E formando un segmento che essendo formato dalla congiunzione dei due punti di tangenza tra il triangolo isoscele e due angoli congruenti è parallelo alla base infatti l'angolo CGB e l'angolo CEB risultano essere congruenti perché resto della sottrazione tra gli angoli alla base e quelli creati, quindi gli angoli OGE e OEG sono congruenti, da questo gli angoli CGE e BEG sono congrenti e i segmenti paralleli.**
4) **Ora individuiamo gli angoli, che possiamo ricavarci, sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (180) ed angoli opposti al vertice sono congruenti, e 1 angolo giro è due angoli piatti (360). Infine applico le proprietà di rette parallele tagliate da una trasversale.**
   - **Il Triangolo CBO è equilatero avendo due angoli di 60 (180-120=60).**
   - **Gli angoli CGB e CBE sono di 40 (180-60-80=40)**
   - **L'angolo GOE essendo opposto al vertice COB è anch'esso di 60**
   - **L'angolo OGE è di 60 perché alterno interno rispetto a GBO formato dai segmenti paralleli GE e CB tagliati da GB.**
   - **Il triangolo GOE è equilatero perché 2 angoli di 60**
   - **Gli angoliGOC e EOB sono opposti al vertice e quindi congruenti e più specificatamente di 180 perché gli altri due (GOE e COB) sono 60 ((360-60-60)/2)**
   - **Gli angoli GOC e EOB sono congruenti e di 20 perché differenza di angoli congruenti (C=B e GBC=ECB *ipotesi quindi C-ECB=B-GBC=20)**

- **Gli angoli DCB e ADF sono congruenti (80) perché corrispondenti formati dai segmenti di perpendicolare DF e CB tagliati da AC**
- **Così per gli angoli FBC e AFD.**
- **L'angolo GHD è di 60 per differenza angoli interni triangolo(180-40-80=60)**
- **Così anche l'angolo EIF**
- **L'angolo OHI è di 60 perché angolo opposto al vertice di GHD**
- **Quindi il triangolo OHI è equilatero perché 2 angoli di 60.**

La prima parte è finita e per comodità ora considero solo il trapezio GEFD



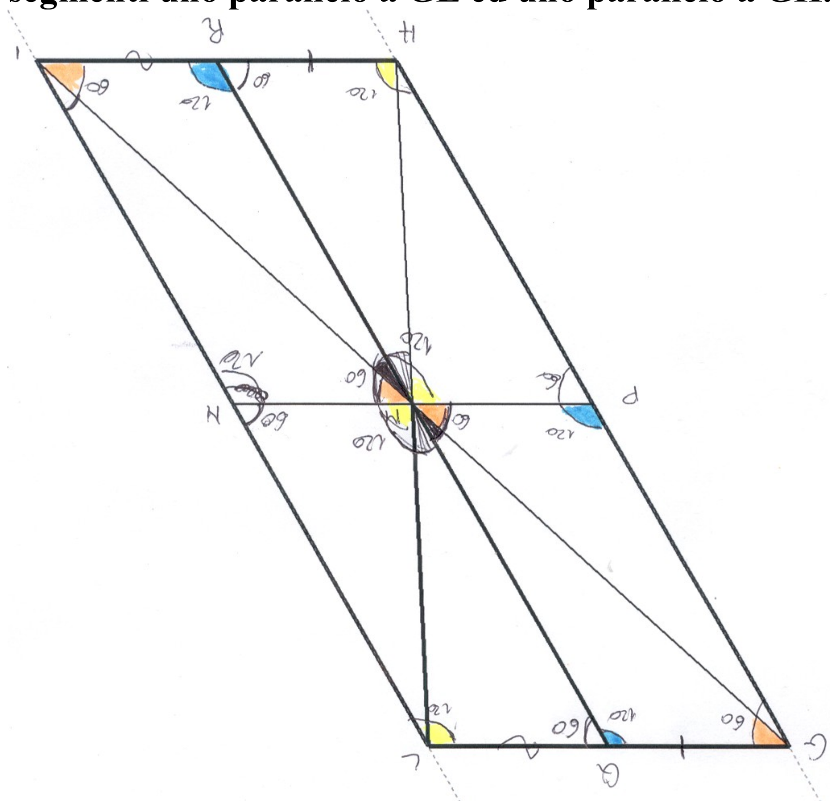
Traccio il segmento di parallela ad EI passante per D e trovo L che è l'intersezione di quest'ultimo con GE, poi congiungo L con I

1) **Considero il quadrilatero DIEL**
    - **DI è parallelo ad LE perché segmenti giacenti sulle rette parallele GE e DF (per prop trasitiva infatti essendo GE par. alla base e DF ugualmente allora tra loro sono parallele).**
    - **Dl è parallelo ad EI per ipotesi.**
    - **Allora**
      DIEL è un parallelogramma per la definizione infatti è un quadrilatero con lati opposti paralleli

      Quindi
      LDI =IEL=60 perché angoli opposti di un parallelogramma
      DLE=EID=120 per lo stesso motivo e la loro ampiezza risulta da (360-60-60)/2

LE=DI perché lati opposti di un parallelogramma
LD=EI perchè”   “

2) **Ora per comodità uso un’altra figura e mi concentro sul quadrilatero GLIH di cui traccio le diagonali e faccio passare per il loro punto d’incontro due segmenti uno parallelo a GL ed uno parallelo a GH.**



Essendo i segmenti aggiunti passanti per la diagonali è sicuro che i segmenti GL e PN siano divisi a metà
Considero quadrilatero GQRH è un parallelogramma perché ha tutti i lati opposti paralleli.
HGQ=60 per ipotesi
HRG=60 perché angolo opposto di G
GHR=RQG perché sono angoli opposti di un par. e sono di 120 perché (360-60-60)/2=120
L’angolo HGL=HPM=69 perché angoli corrispondenti formati dalla tagenza della retta GH con le due rette parallele GL e PN
L’angolo GPM=120 perché questo e l’angolo HPM sono supplementari
I quadrilateri GQMP e PMRQ sono parallelogrammi perché i lati opposti sono paralleli
Gli angoli PGQ=QMP per dim prec

Gli angoli HPM=HRM per dim e sono di 60
Gli angoli PHR=PMR per dim e sono 120 perché (360-60-60)/2=120
L'angolo RMN=PMQ perché opposti al vertice e sono di 60
L'angolo QMN=PMR perché opposti al vertice e sono di 120
Gli angoli GQM e MQL sono supplementari quindi quest'ultimo è di 60
Dimostrato che GQMP e PMRH sono parallelogrammi possiamo dire che GQ=PM essendo lati opposti di un parallelogramma, allora essendo PM=MN allora MN è congruente a GQ .
Ora sappiamo che GQMP , PMRH e QLNM sono parallelogrammi uguali.
MNL=NQL=60 per ipotesi
MNI e MNL sono supplementari quindi il primo è di 120
L'angolo RIN=60 perché 360-60-120-120=60
Ora il quadrilatero MNIR ha gli angoli opposti congruenti e quindi è un parallelogramma
Si può concludere che essendo Lm paral. a GP e PH paral. a NI allora le due rette GH e LI sono parallele.

Per finire riprendo la figura di prima
Essendo l'angolo DHG opposto al vertice di OHI esso è di 60 ed essendo i segmenti GH e LI paralleli tagliati dalla trasversale DF l'angolo HIL   è corrispondente al primo e quindi congruente e di 60.
Concludendo
Essendo l'angolo del parallelogramma DIE di 120 tagliato dalla sua diagonale in un angolo di 60, quindi la sua metà posso affermare che questo parallelogramma è un rombo quindi i suoi angoli vengono tagliati a metà dalle diagonali.

Risposta essendo l'angolo richiestomi, una parte, tagliata dalla diagonale, dell'angolo LEI del rombo, esso è metà di questo quindi se l'angolo è di 60 questo è di 30.

c.v.d.