Oggi è Giovedì 15 Maggio 2008 ed il LANCIAPROBLEMI fa una nuova eccezione al suo regolamento poiché chi 'lancia' un problema dovrebbe conoscere la soluzione.
Questa era la regola anche nelle disfide matematiche medioevali di TARTAGLIANA memoria ma noi abbiamo già fatto una eccezione con il PAGURO DI MATTEO che è stato risolto solo in parte e l'autore possiede solo una congettura sulla soluzione.

Ora il prof . BERTI GIANPAOLO lancia un problema e chiede aiuto ai lanaproblemisti di tutto il mondo per trovare una regola che dia tutte le soluzioni intere dell'equazione :

$$X^2 = Y^3 + Z^3.$$

Il prof. Berti dice di aver trovato infinite terne che soddisfano l'equazione (3,1,2 è un esempio) ma gli manca ancora la regola generale per trovarle tutte.

Per chi ha poca dimestichezza con la teoria dei numeri spiego, con un esempio, cosa si intende per regola generale in questi casi.

Il problema di trovare le terne intere positive X,Y,Z tali che $X^2+Y^2=Z^2$ (terne Pitagoriche) è stato risolto da più di 2000 anni dal famoso Diofanto attraverso la regola $X=m^2-n^2$, $Y=2mn$, $Z=m^2+n^2$ dove $m>n>0$ sono numeri interi arbitrariamente scelti. Questa regola, pur non generando tutte le terne pitagoriche(9,12,15 è una di queste), genera però tutte le terne primitive (terne di numeri primi fra loro a due a due), basta scegliere m,n primi fra loro e di parità diversa. Trovate le primitive il problema è completamente risolto perchè le altre sono terne multiple delle primitive. Faccio un esempio:8,15,17 è primitiva e genera l'infinità di terne multiple (16,30,34:);(24,45,51);(32,60,68) ecc. La terna 9,12,15, ad esempio è derivata dalla 3,4,5 ottenuta quando m=2; n=1.

Ecco… quello che Gianpaolo propone di trovare è proprio una regola simile che funzioni per l'equazione $X^2 = Y^3 + Z^3$. Buon lavoro.

Oggi è il 13 Giugno 2008 e la prima persona che mi ha fatto gli auguri di buon onomastico è stata la collega Ponso Adelina che me li ha fatti in modo molto gentile addirittura ieri. Vediamo se oggi ci sarà qualcun altro che si ricorderà di me perché, strano ma vero, se non ci fossero questi amici sinceri, neanche io mi ricorderei che oggi è il giorno di S. Antonio. Quando era viva mia madre lei era sempre la prima a ricordarmelo e mi preparava i crostoli anche se non era carnevale.

Approffitto quindi dell'importanza di questa data per esporre quello che di buono è arrivato sul problema delle terne sopra esposto.

Fin dall'inizio il prof. Berti, come ho già detto, aveva trovato infinite soluzioni e le illustrava nel modo seguente :

Determinare i quadrati scomponibili in somma di due cubi.

Si deve risolvere la seguente equazione: $x^3 + y^3 = z^2$

Alcune soluzioni si ricavano imponendo $\begin{cases} x + y = \lambda \\ x^2 - xy + y^2 = \lambda \end{cases}$

Questo sistema simmetrico porta all'equazione di 2° grado $3t^2 - 3\lambda t + \lambda^2 - \lambda = 0$

Calcolando il $\Delta = 12\lambda - 3\lambda^2$**, si trova che è positivo per** $0 \le \lambda \le 4$**, perciò si ha:**

$\lambda = 0$	***x* = 0**	***y* = 0**	***z* = 0**
$\lambda = 1$	***x = 1***	***y = 0***	***z = 1***
$\lambda = 2$	***Sol irr.***	***Sol irr.***	***Sol irr.***
$\lambda = 3$	***x = 2***	***y = 1***	***z = 3***
$\lambda = 4$	***x =2***	***y =2***	***z = 4***

Più interessante è la seguente posizione:

$\begin{cases} x + y = \lambda^2 \\ x^2 - xy + y^2 = \mu^2 \end{cases}$ **che porta alla seguente equazione di 2° grado:** $3t^2 - 3\lambda^2 t + \lambda^4 - \mu^2 = 0$

Anche il $\Delta = 12\mu^2 - 3\lambda^4$ **deve essere un quadrato perfetto.**

Pertanto si dovrà risolvere la seguente equazione: $3\left(4\mu^2 - \lambda^4\right) = H^2$**, che si può ulteriormente scomporre in** $3\left(2\mu - \lambda^2\right)\cdot\left(2\mu + \lambda^2\right) = H^2$.

Alcune soluzioni potrebbero derivare dai due sistemi

$\begin{cases} 2\mu - \lambda^2 = 3\sigma^2 \\ 2\mu + \lambda^2 = \rho^2 \end{cases}$ **;** $\begin{cases} 2\mu + \lambda^2 = 3\sigma^2 \\ 2\mu - \lambda^2 = \rho^2 \end{cases}$

Il primo sistema non ammette soluzioni intere.
Il secondo invece dà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \sigma = 6u^2 + 4uv + 9v^2 \\ \lambda = 2u^2 + 18uv + 3v^2 \\ \rho = 10u^2 - 15v^2 \\ \mu = 52u^4 + 36u^3v + 18u^2v^2 + 54uv^3 + 117v^4 \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} x = (2u - v)\cdot(4u + 3v)\cdot\left(4u^2 + 6uv + 21v^2\right) \\ y = 4(3v - u)(u + 2v)(7u^2 + 3uv + 3v^2) \\ z = \left(2u^2 + 18uv + 3v^2\right)\cdot\left(52u^4 + 36u^3v + 18u^2v^2 + 54uv^3 + 117v^4\right) \end{cases}$$

con $\frac{v}{2} < u < 3v$**. (se vuoi valori >0)**

Bisognerebbe dimostrare che il primo sistema non ammette soluzioni intere.
Dim:

$\begin{cases} 2\mu - \lambda^2 = 3\sigma^2 \\ 2\mu + \lambda^2 = \rho^2 \end{cases}$ **che può essere ridotto alla seguente equazione :** $\rho^2 - 2\lambda^2 = 3\sigma^2$**, perchè ciò sia vero sia** ρ che λ devono essere multipli di 3.

Si avrà così $9k^2 - 18h^2 = 3\sigma^2$ **dividendo per 3 si ottiene:** $3k^2 - 6h^2 = \sigma^2$ **così** σ **deve contenere il 3.**

Pertanto $k^2 - 2h^2 = 3\tau^2$ **con** ***k*, *h*,** τ **minori di** ρ, λ, σ **. Quindi per <u>reductio ad infinitum</u> l'equazione** $\rho^2 - 2\lambda^2 = 3\sigma^2$ **non ammette soluzioni intere. (non so se è giusta!!!)**

Alcune soluzioni non banali fornite dalle formule sono:

x= 217 y= 312 z= 6371
x= 1617 y= 592 z= 66599
x= 4097 y= 16352 z= 2107391
x= 11232 y= 7812 z= 1376136
x= 21312 y= 58212 z= 14385384
x= 17577 y= 114192 z= 38658411
x= 40625 y= 35000 z= 10484375
x= 65937 y= 152152 z= 61717319
x= 46657 y= 419832 z= 272214431
x= 50752 y= 7812 z= 11454344
x= 76937 y= 43472 z= 23185499
x= 106752 y= 103012 z= 48058856
x= 157472 y= 329732 z= 199385096
x= 164697 y= 519232 z= 380070179
x= 148192 y= 777252 z= 687610664
x= 97337 y= 1119272 z= 1184530451
x= 231777 y= 240192 z= 162198639
x= 320625 y= 630000 z= 531984375
x= 207977 y= 45032 z= 95327051
x= 280000 y= 142500 z= 157625000
x= 360297 y= 284512 z= 264200651
x= 443072 y= 482372 z= 446341064
x= 585312 y= 1099492 z= 1236801896
x= 625625 y= 1550000 z= 1992171875
x= 630112 y= 2118852 z= 3124554056
x= 313937 y= 30632 z= 175980839
x= 527857 y= 324072 z= 425574071
x= 773217 y= 872872 z= 1061755631
x= 986657 y= 1792232 z= 2591779919
x= 588672 y= 147492 z= 455196456
x= 741897 y= 354312 z= 672924699
x= 1085337 y= 996912 z= 1506401091
x= 1260000 y= 1462500 z= 2264625000
x= 1564992 y= 2769732 z= 5008067784
x= 1466257 y= 1116192 z= 2131423559
x= 1946417 y= 2309552 z= 4437713111

Esistono altre soluzioni che le formule non producono, ad esempio:

21**3**
3711**228**
6556**671**
11257**1261**
433242**9765**
877851**35928**

OGGI PERO' E' ARRIVATA ANCHE UNA RISPOSTA MOLTO ELEGANTE DEL PROF. ZENI AMEDEO. ECCOLA:

$$X^2 = Y^3 + Z^3$$

La soluzione del problema si può ricavare osservando l'andamento di alcune terne di soluzioni che risultano essere di due tipologie.

I Tipologia

x	y	z		x2	y3	z3
3	1	2		3^2	1	2^3
24	4	8		3^2*2^6	$1*2^6$	2^3*2^6
81	9	9		3^2*3^6	$1*3^6$	2^3*3^6

Dall'andamento si ricava che le soluzioni devono avere la seguente forma:
$X = 3m^{3n}$
$Y = m^{2n}$
$Z= 2m^{2n}$

II Tipologia

x	y	z		x2	y3	z3
4	2	2		2^4	2^3	2^3
32	8	8		2^{10}	2^9	2^9
256	32	32		2^{16}	2^{15}	2^{15}

Dall'andamento si ricava che le soluzioni questa volta devono avere la seguente forma:
$X = 2^{3n+2}$
$Y = 2^{2n+1}$
$Z= 2^{2n+1}$

Amedeo Zeni

Oggi, 28/Giugno/2008, è arrivata dalla Romania questo contributodel prof. Munaretto:

Data l'equazione:

1) $$x^2 = y^3 + z^3$$

cerchiamo innanzitutto le soluzioni lungo la retta del piano zy

2) $$z = m/n\ y$$

con m e n numeri naturali positivi. Posto

3) $y = n\ t$ e
4) $z = m\ t$

si ottiene.

5) $$x^2 = t^3\ (n^3 + m^3)$$

il secondo membro della 5) deve essere un quadrato, quindi una soluzione è:

$$t = (n^3 + m^3)$$

questa potrebbe non essere la soluzione più piccola perché scomponendo il numero

$$n^3 + m^3$$

in fattori primi si può trovare:

$$n^3 + m^3 = a^2\ k$$

in questo caso la soluzione minima è:

$$t = k$$

e tutte le altre soluzioni devono essere del tipo :

$$t = b^2\ k$$

queste sono tutte le soluzioni lungo la retta 2) e al variare di m e n trovo tutte le soluzioni di 1).

Non ho avuto il tempo di controllare se le soluzioni di Zeni e di Munaretto sono complete. E' interessante questa verifica e la propongo a chi ci legge.