



3/3/2008

IL PAGURO

La figura soprastante me l'ha mandata Bortolotto Matteo e l'ha chiamata "IL PAGURO". La costruzione di questo Paguro inizia dal triangolo rettangolo isoscele OAB di cateti OA=OB=1 e prosegue all'infinito costruendo nuovi triangoli rettangoli OBC, OCD, ODEaventi un cateto unitario e l'altro coincidente con l'ipotenusa del precedente . Si può notare che l'angolo in O dei vari triangoli tende a diventare sempre più piccolo ed allora Matteo ci pone la seguente domanda:

- QUANTI GIRI COMPLETI E' POSSIBILE FAR FARE ALLA SPEZZATA PERIFERICA DEL PAGURO?

Ma la domanda più difficile si pone supponendo che le spire del PAGURO siano molte:

COME VARIA LA LARGHEZZA DELLA PARTE DI PIANO COMPRESA FRA LE SPIRE SE LA SI PERCORRE NEL VERSO ORARIO CHE CI ALLONTANA DAL CENTRO?

Le soluzioni vanno inviate al solito indirizzo tonipulita@hotmail.com

Oggi è il 13 Aprile 2008 ed in Italia si vota. Io ne approfitto per mettere fuori la risposta alla Prima delle due domande:

'LA SPEZZATA PERIFERICA DEL PAGURO COMPIE INFINITI GIRI COMPLETI'.

Una dimostrazione è la seguente:

Osservato che per angoli α , acuti e non nulli, sussiste la relazione $\text{sen}(\alpha) < \alpha < \text{tg}(\alpha)$ consideriamo la serie $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ i cui termini sono le misure in radianti (α_n) degli angoli al centro dei triangoli BOA; COB; DOC.... Questa serie è una minorante di

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \text{tg}(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ed è una maggiorante di } S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Poiché sia S_2 che S_3 sono entrambe maggioranti della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che è divergente, si deduce che la somma degli angoli al centro del nostro paguro tende all'infinito.

N.B.

La dimostrazione poteva essere raggiunta anche con il solo confronto fra le serie S_1 ed S_3 .

MA LA SECONDA QUESTIONE....

La seconda questione è evidentemente più difficile perché l'autore stesso del problema non possiede la soluzione ma solo una 'congettura'. Matteo Bortolotto ipotizza infatti, ed i programmi al computer sembrano dargli ragione, che tracciata una semiretta qualsiasi uscente dal centro del paguro e chiamate con $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ la successione delle infinite intersezioni fra la semiretta e le spire del paguro, la distanza fra due punti consecutivi nella semiretta tenda a π quando $n \rightarrow \infty$.

Qualcuno saprà dimostrarlo (o confutarlo)? Vedremo...