12/01/2008

L'ERRORE CHE NON C'ERA

In questo periodo in molte classi prime delle scuole superiori si sta studiando la divisione fra polinomi ed io mi ricordo che quando avevo 13 anni ho perso molto tempo a trovare un errore (che non c'era) in un esercizio dei compiti per casa. Si trattava di effettuare una divisione come questa $(2x^3+3x^2y-16xy^2+y^3):(x^2+3xy+y^2)$ ed era richiesto di effettuarla prima rispetto ad x e poi di ripetere il calcolo rispetto ad y. Io fui sorpreso nel vedere che rispetto ad x risultava $Q(x)=2x-3y$; $R(x)=-9xy^2+4y^3$ mentre rispetto ad y risultava un quoziente ed un resto molto diversi $Q(y)=y-19x$; $R(y)=59x^2y+21x^3$.

Subito pensai di aver fatto qualche errore di calcolo ma dopo aver ripetuto più volte le operazioni i risultati non cambiavano. Provai allora a fare la prova di questa divisione e vidi che effettivamente errori non ce n'erano. Era quindi "normale " che i quozienti ed i resti della divisione fossero diversi nei due casi e mi posi quindi una domanda alla quale il libro di testo non dava risposta:

Poiché esistono divisioni fra polinomi in due variabili P(a,b) : D(a,b) che danno lo stesso quoziente e lo stesso resto sia quando i calcoli si fanno rispetto alla lettera "a" che quando si fanno rispetto alla lettera "b" quale è una condizione necessaria e sufficiente (attenzione! non ho detto sufficiente.) perché ciò avvenga ?

Il problema è un po' impegnativo anche per gli alunni del triennio e quindi questo lancio è rivolto a tutti .

Come al solito le risposte si mandano a tonipulita@hotmail.com

Oggi è il 28/1/2008 ed è ora di esporre la soluzione :

SOLUZIONE:

A scuola si insegna che l'algoritmo della divisione si arresta quando il resto, calcolato rispetto ad una lettera assume, rispetto a quella lettera, un grado inferiore a quello del divisore. Può però capitare che questo resto abbia grado maggiore o uguale a quello del divisore rispetto all'altra lettera. In questo caso le due divisioni di cui parla il problema darebbero quozienti e resti diversi.

La condizione necessaria e sufficiente affinché la divisione dia lo stesso quoziente e lo stesso resto è che il resto calcolato rispetto alla prima lettera sia di grado inferiore a quello del divisore anche rispetto alla seconda.

Dimostrazione:

(La condizione è sufficiente)

Supponiamo che una divisione $P(a,b):D(a,b)$ effettuata rispetto ad "a" dia come quoziente $Q(a)$ e come resto $R(a)$ e poi, effettuata rispetto a "b" dia come quoziente $Q(b)$ e come resto $R(b)$.

La "prova" della divisione offre le seguenti identità:

$$P(a,b)=Q(a)\cdot D(a,b)+R(a)=Q(b)\cdot D(a,b)+R(b)\Rightarrow D(a,b)\cdot[Q(a)-Q(b)]=R(b)-R(a).$$

Se si suppone che i gradi dei resti $R(b)$ ed $R(a)$ siano inferiori al grado del divisore $D(a,b)$ sia rispetto ad "a" che rispetto a "b" l'uguaglianza in questione può sussistere solo se $Q(a)-Q(b)=0$ e ciò implica $Q(a)=Q(b)$ ma anche $R(a)=R(b)$.

(La condizione necessaria)

L'algoritmo della divisione si arresta quando (rispetto alla lettera cui ci si riferisce) il grado del resto è inferiore a quello del divisore. Se completati i calcoli nei due casi si verifica che $R(a)=R(b)$ l'uguaglianza $P(a,b)=Q(a)\cdot D(a,b)+R(a)=Q(b)\cdot D(a,b)+R(b)$ garantisce anche che $Q(a)=Q(b)$ c.v.d.

Una osservazione finale

Nell'esempio $(2x^3+3x^2y-16xy^2+y^3):(x^2+3xy+y^2)$ si ottiene $Q(x)=2x-3y$; $R(x)=-9xy^2+4y^3$ e $Q(y)=y-19x$; $R(y)=59x^2y+21x^3$. Si vede che rispetto alla lettera y il grado del resto è 3 ed è maggiore di quello del divisore che è 2. La divisione potrebbe quindi continuare rispetto ad y ed il quoziente $Q(x)=2x-3y$ si arricchirebbe dei nuovi termini $4y-21x$ divenendo $2x-3y+4y-21x=y-19x=Q(y)$ e il nuovo resto diventerebbe $21x^3+59x^2y=R(y)$. Il nuovo quoziente ed il nuovo resto diventerebbero identici a quelli calcolati rispetti ad y.

N.B.

Molto spesso si sente dire che quoziente e resto saranno uguali, nei due casi, solo se il resto è nullo. Questa affermazione è sbagliata e sarebbe corretta se dicesse così: quoziente e resto saranno uguali, nei due casi, se il resto è nullo. La condizione infatti è sufficiente ma non è necessaria. La situazione è simile a quella di chi sbaglia dicendo che (ci sono le nuvole) ==> (piove) la "freccia giusta " ha la punta dall'altra parte (ci sono le nuvole) <== (piove). Tutti sanno infatti che se la freccia della implicazione logica ha una sola punta, la proposizione "in coda" è sufficiente per garantire quella "in punta" ma non è necessaria , mentre quella in " punta" è una condizione necessaria per garantire quella "in coda" ma non è sufficiente.