oggi è il 18/12/2007

IL "LANCIAPROBLEMI" PER LE SCUOLE MEDIE (ma anche per gli alunni del biennio liceale)

Mettete alla prova la vostra abilità matematica risolvendo questi tre problemi che Leonardo Pisano, il famoso Fibonacci, propose ai commercianti di Pisa nel 1202. I problemi si trovano nel famosissimo LIBER ABACI con il quale divulgò in Italia la "nuova aritmetica" basata sul sistema posizionale a 10 cifre.

Primo problema

Due navi si trovano in due porti ad una certa distanza fra loro. Viaggiano l'una verso l'altra seguendo lo stesso tragitto; la prima nave percorre l'intera distanza in 5 giorni, la seconda in 7 giorni. Se partono insieme dopo quanti giorni si incroceranno ? A che distanza dal porto di partenza della nave più veloce si incontreranno?

Secondo problema

Quattro uomini trovano un cavallo in vendita. Ognuno di loro vorrebbe comprarlo ma nessuno ha sufficienti bisanti a disposizione. Il primo dice : " Io posso comprarlo se mi date la metà dei vostri bisanti". Il secondo, a sua volta, dice: "Anch'io posso comprarlo, se mi date 1/3 dei vostri bisanti ". E il terzo:" Io invece lo posso comprare, se date 1/4 dei vostri bisanti" . Il quarto infine dice:" Io posso comprarlo, se mi date 1/5 dei vostri bisanti".
Se i prezzi sono espressi in numeri interi (i più piccoli possibili), quanti bisanti possiede ciascuno degli uomini? Quanto costa il cavallo?

Terzo problema

Un tale, recandosi a Lucca per affari, vi ricavò il doppio di quanto possedeva, anche se poi spese 12 denari. Partendo da Lucca si diresse a Firenze, dove ricavò il doppio di quanto ancora possedeva, spendendo poi ancora 12 denari. Tornando a Pisa, ricavò nuovamente il doppio di quanto possedeva e poi spese i soliti 12 denari. Alla fine del viaggio, il mercante si accorse di non avere più neanche un denaro.
Quanti denari aveva all'inizio del viaggio?

Mandate le soluzioni per posta elettronica a tonipulita@hotmail.com e se le risposte saranno esatte i vostri nomi saranno inseriti nel sito del liceo e resi noti a tutto il mondo Web.

Il lanciaproblemi augura un felice Natale e Buone Feste a tutti .

Oggi è il 6/gennaio/2008 e, come si diceva una volta, "l'Epifania tutte le feste porta via." Vediamo quindi le soluzioni dei tre problemi ma vediamo soprattutto come li risolse il Fibonacci.

Primo problema

(noi lo risolviamo così)

Se "s" è la distanza dei due porti in km ed il tempo t lo misuriamo in giorni, le due navi hanno le velocità $v_1 = \frac{s}{5} km/giorno$ **;** $v_2 = \frac{s}{7} km/giorno$**.**

L'equazione che determina il tempo "t" necessario per l'incontro è la seguente

$\frac{st}{5}+\frac{st}{7}=s \Rightarrow t=\frac{35}{12} \Rightarrow t=\frac{70}{24}$ **. Il tempo necessario è quindi di 70 ore pari a 2 giorni e 22 ore.**

(Leonardo lo risolse così)

Se le navi viaggiassero senza sosta per 35 giorni, la prima nave avrebbe percorso 7 volte la distanza fra i porti mentre la seconda l'avrebbe percorsa 5 volte. Le due navi in 35 giorni avranno quindi compiuto 12 viaggi completi. Il primo incontro avviene quando è stato coperto il primo intero tragitto e perciò il tempo necessario è 35/12 di giorno equivalente a 2 giorni e 22 ore (Poiché ai tempi di Leonardo il giorno era considerato di 12 ore la soluzione da lui offerta risultò scritta nella forma 11/12 2 per indicare 2+11/12 cioè 2 giorni e 11 ore).

.

Secondo problema

(noi lo risolviamo così)

Indicando con x,y,z,k il numero dei bisanti posseduti nell'ordine dai quattro amici ed indicando con "c" il costo del cavallo si perviene ad un sistema lineare di quattro equazioni e cinque incognite. Il sistema è il seguente:

x+(y+z+k)/2=c		**2x+y+z+k=2c**		**x = c/37**
y+(x+z+k)/3=c		**x+3y+z+k=3c**		**y=19c/37**
z+(x+y+k)/4=c	**Equivalente a quest'altro**	**x+y+4z+k=4c**	**E la soluzione è**	**z=25c/37**
k+(x+y+z)/5=c		**x+y+z+5k=5c**		**k=28 /c37**

Questo sistema ammette quindi infinite soluzioni ottenute assegnando a "c" valori arbitrari. Le soluzioni sono numeri interi solo se c è un multiplo di 37 ed il minimo valore intero di x,y,z,k,c si ottiene per c=37 e quindi la soluzione richiesta è x=1; y=19; z=28; k=37;c=37.

(E Leonardo come lo risolse?)

Leonardo risolse molti problemi come questo attraverso una lunga descrizione "a parole" perché a quei tempi non erano conosciute le notazioni ed i simboli algebrici con i quali noi traduciamo i dati dei problemi e risolviamo i sistemi di equazioni. I suoi ragionamenti sono simili a quelli che io descrivo con i nostri simboli e con le mie interpretazioni riportate qui sotto:

Siano x,y,z,k il numero dei bisanti posseduti nell'ordine dai quattro amici e sia "c" il costo del cavallo. I dati dicono che $c=x+\frac{y+z+k}{2}=y+\frac{x+z+k}{3}.=z+\frac{x+y+k}{4}=k+\frac{x+y+z}{5}$ **.**

Se dopo l'acquisto del cavallo si sommano i bisanti rimasti ai quattro amici si trova, in ciascuna delle quattro ipotesi, sempre la stessa somma x+y+z+k-c e quindi risulta :

$$\frac{y+z+k}{2}=\frac{2}{3}(x+z+k)=\frac{3}{4}(x+y+k)=\frac{4}{5}(x+y+z)$$

A questo punto , come in molti altri problemi, si usa il metodo che il Fibonacci chiama "della falsa posizione" e, supponendo arbitrariamente che il valore della prima frazione sia 12, deduce che: $y+z+k=24$**;** $x+z+k=18$**;** $x+y+k=16$**;** $x+y+z=15$**;**

Calcolando le somme dei bisanti avanzati nelle quattro ipotesi si ricava che $3x+3y+3z+3k=3(x+y+z+k)=73$**. Da questa falsa posizione risulterebbe**

$x+y+z+k=\frac{73}{3}$ **ma questo valore non è intero come pretende il problema. Leonardo allora triplica i valori derivanti dalla falsa posizione e suppone, sempre arbitrariamente, che:**
$x+y+z+k=73$**; e deduce che** $y+z+k=72$**;** $x+z+k=54$**;** $x+y+k=48$**;** $x+y+z=45$**;**

Da questa nuova posizione, che non risulterà falsa, deduce che :
$x=73-72=1$**;** $y=73-54=19$**;** $z=73-48=25$**;** $k=73-45=28$**;** $c=37$.

La soluzione x=1; y=19; z=25; k=28; c=37 è, fra le infinite possibili, quella espressa con i più piccoli numeri interi positivi come richiesto dal problema.

Terzo problema

(La signora Zonta Caterina lo ha risolto così)

SALVE PROF.
IN UNA PAUSA LAVORO HO RISOLTO IL 3° CHE E'
IL + FACILE
X= DENARI INIZIALI
(X+X) -12......LUCCA CIOE' 2X-12
2(2X -12) -12..... FIRENZE CIOE' 4X-24-12= 4X-36
2(4X-36) -12= 0 CIOE' 8X-72-12=0 8X-84= 0 X= 10,50
PERTANTO ALL'INIZIO DEL VIAGGIO AVEVA 10,5 DENARI
VERIFICA
(10,5 + 10,5) -12= 9 LUCCA
2 X 9 -12= 6 FIRENZE
6X2-12=0 PISA
LA SALUTO CORDIALMENTE CATERINA

In sostanza la signora Caterina ci dice che se x è la somma iniziale con la quale il commerciante parte da Pisa, l'equazione che risolve il problema è la seguente:
$2[2(2x-12)-12]-12=0 \Rightarrow 2(4x-36)-12=0 \Rightarrow 8x-84=0 \Rightarrow x=10.5$

(Come venne risolto da Leonardo ?)

Il Fibonacci usa il metodo che chiama della "falsa doppia posizione".

-Facciamo una prima ipotesi: Se il mercante fosse partito da Pisa con 12 denari , alla partenza da Lucca avrebbe avuto 2x12-12=12 denari . Alla partenza da Firenze avrebbe avuto 2x12-12=12 denari. A Pisa, alla fine dei suoi traffici, avrebbe avuto ancora 2x12-12=12 denari e si sarebbe ritrovato alla fine con 12 denari.
-Facciamo ora una seconda ipotesi: Se il mercante fosse partito da Pisa con 11 denari , alla partenza da Lucca avrebbe avuto 2x11-12=10 denari. Alla partenza da Firenze, avrebbe avuto 2x10-12=8 denari. Alla fine dei suoi traffici a Pisa , avrebbe posseduto 2x8-12=4 denari.
Se con la diminuzione di un denaro alla partenza(differenza fra la prime e la seconda posizione), il risultato finale cala di 8 denari, di quanto bisogna diminuire la somma della prima ipotesi per avere una diminuzione di 12 denari?
Noi diremmo che la risposta sta nella proporzione 1:8=x:12 ==> x=1,5 denari. Leonardo infatti, non proprio con le nostre notazioni, effettua la stessa operazione deducendo che in partenza il mercante aveva 10,5 denari.

Nota finale: Pubblicherò le vostre osservazioni su questi problemi e sulle strategie usate da Leonardo Pisano, figlio di Bonaccio, detto il Fibonacci. A proposito, non vi sembra che il mondo di allora fosse più simpatico del nostro se un genio come Leonardo era chiamato amichevolmente e senza tanti fronzoli "il fibonacci" ? Pensate che il vezzo di affibbiare soprannomi anche alle persone molto colte si protrasse per tutto il medioevo e non risparmiò neppure Nicolò Fontana, che fu forse il più grande algebrista del 1500. Nacque a Brescia da una famiglia poverissima. Durante la presa di Brescia da parte dei francesi nel 1512 il padre

fu ucciso e lui stesso ferito alla mandibola e al palato. Dato per morto, sopravvisse grazie alle cure della madre, ma gli rimase una evidente difficoltà ad articolare le parole . Per questo ebbe il soprannome "Tartaglia" che accettò e lui stesso utilizzò tutta la vita per firmare le sue opere.
