

QUANDO DIO NON MANTIENE LE SUE PROMESSE...

Oggi è il 6/08/2007 e nella pace della città vuota lancio in orbita questo problema:

.....
Premetto qualche digressione filosofica sul comportamento degli Dei.

Può un Dio dire bugie se ha detto ai comuni mortali che è peccato farlo?

Può un Dio ammazzare se il suo quinto postulato lo impedisce?

Mi vien da dire che un dio cattivo, ladro, bugiardo e magari anche assassino non farebbe al caso mio e lo lascerei a chi lo ha inventato.

In matematica esistono questioni che fanno pensare a cose del genere.

Immaginiamo la fila infinita dei poligoni regolari con tre, quattro, cinque,...n...lati.

Per tutti questi, che io chiamo "comuni mortali", l'area si calcola con la formula

$$A = \frac{p \times a}{2} \quad (\text{Area uguale perimetro per apotema diviso 2})$$

Il dio di questi comuni mortali, l'elemento all'infinito nella fila infinita dei poligoni regolari (se esiste) è il cerchio. Se questo dio è serio deve, pure lui, rispettare gli ordini imposti ai comuni mortali e quindi quella formula deve valere anche per lui. Tutti sanno che nella geometria del signor Euclide ciò è effettivamente vero anche se quel dio si è un po' arrabbiato con Euclide e gli ha detto:

"Caro Euclide, prima dici che il numero intero più grande di tutti non esiste e poi vuoi studiare me che, se esistessi, sarei il poligono con il maggior numero di lati. Caro Euclide, tu sei come quegli atei che bestemmiano un dio che per loro non esiste. E poi, come puoi pensare di "quadrarmi"? Come puoi pensare di misurare me, che sono un dio, usando come unità di misura il quadrato che è un comune mortale?"

Tutti sanno che Euclide ha fatto "spallucce" e gli ha replicato:

" Parla, parla, di quello che vuoi, io ti quadrerò come ho fatto con tutti gli altri poligoni."

Conclusione della storia.....

Il cerchio si è messo a ridere ed ha lanciato sulla terra il numero $\pi = 3.141592654.....$ che ha tutte le disgrazie del mondo perchè non solo è irrazionale (non ratio = non rapporto di interi) ma è anche trascendente..meditate gente, meditate gente. Comunque quel dio, il cerchio, è un dio serio e non si sottrae agli obblighi imposti ai comuni poligoni regolari. Anche per lui l'area si calcola con la stessa formula che vale per i comuni mortali. Tuttalpiù il suo perimetro si potrà chiamarlo circonferenza e la sua apotema la si chiamerà raggio, ma questo non cambia le cose.

IN MATEMATICA PERO' CI SONO ANCHE DIVINITA' "IMBROGLIONE".

Analizziamo il lancio denominato "formiche" che ho proposto il 18/07/2007. Il problema, anche se sorprendente, non era difficile, ma nasconde un DIO IMBROGLIONE. Rilancio la questione e pongo una nuova difficile (?) domanda:

Per andare dal punto A al Punto B una formica cammina lungo una semicirconferenza di diametro $AB=d$. Una seconda formica si porta da A a B percorrendo due semicirconferenze di diametri AM e MB con M punto medio di AB. Una terza formica suddivide AB in n segmentini adiacenti di

lunghezza $x = \frac{d}{n}$ e percorre, da A fino a B, tutte le n semicirconferenze che hanno per diametro

quei segmentini. Si può facilmente dimostrare che le tre formiche, sorprendentemente, percorrono tre traiettorie diverse ma aventi la stessa lunghezza. **(questa è anche la facile soluzione del lancio**

precedente che ho chiamato "formiche"). Poichè le infinite traiettorie corrispondenti ad $n=1,2,3,\dots,n,\dots$ hanno quindi tutte la stessa lunghezza data da $S = \pi \frac{d}{2}$ sorge spontanea la domanda che pongo in questo lancio:

Perché il segmento AB, che è l'elemento all'infinito nella sequenza infinita di queste traiettorie non ha la stessa loro lunghezza? Perché il dio di queste traiettorie non rispetta la legge a cui sono sottoposte le comuni mortali?

Per dirla matematicamente si chiede:

"Perchè per n che tende all'infinito la lunghezza della traiettoria non tende a quella del segmento AB? "

Vi dico solo che nel 700 religiosi e matematici hanno molto litigato su questioni come queste. Voi cosa mi dite? T.P.

Commenti arrivati:

29/10/2007 Paolo Frigo ci dice:

Sono Frigo Paolo e ho riprovato a risolvere il problema dei punti allineati alla luce del suggerimento. Simpaticissime le "monade" e molto profonda la massima. A proposito del lancio "Quando Dio non mantiene le sue promesse..." non mi sembra affatto scontato che se le semicirconferenze sono infinite si va a coincidere con il segmento AB. In questo periodo stiamo facendo i limiti e ho capito che con l'infinito bisogna andarci piano. Sono sorte domande di questo tipo:
Perchè "0*(infinito)" è una forma indeterminata e non da 0? A queste domande la prof. ha risposto sempre nello stesso modo dicendo:
" Ragazzi l'infinito non è un numero". Quindi mi pare che sia tutto da discutere sul fatto che l'elemento all'infinito delle infinite circonferenze sia il diametro AB.

Oggi è sabato 8/12/2007.

Il problema che questo "Lancio" propone si è rivelato sottile e complesso.

La branca della matematica che studia questi fenomeni (e molti altri) si chiama TOPOLOGIA.

Abbiamo chiesto il parere al Prof. G.De Marco dell'Università di Padova, che è un esperto dell'argomento. La sua risposta è riportata alla fine di questo commento. Il lanciaproblemi è stato enormemente valorizzato dal contributo che il Prof. De Marco ci ha dato. Lo ringraziamo anche per aver saputo impiegare un linguaggio comprensibile e divertente, esattamente nello stile che contraddistingue "IL LANCIAPROBLEMI"!

P.S. Sarà contento anche Paolo Frigo poiché il suo sospetto : "... Quindi mi pare che sia tutto da discutere sul fatto che l'elemento all'infinito delle infinite semicirconferenze sia il diametro AB." È stato considerato "molto lecito ed anzi opportuno".

Ecco quello che ci ha detto il prof. De Marco:

Avevo già visto lo "pseudoparadosso" dei semicerchi sia con i semicerchi stessi (sia pure con lievi varianti), che sotto altre forme; ad esempio, si parte da un triangolo, per semplicità isoscele; si prendono due altri triangoli isosceli sulla stessa base AB divisa a metà, con altezza metà. Il perimetro di tali triangoli è ovviamente la metà del perimetro del triangolo originario, dato che c'è un rapporto di similitudine di $1/2$; i due triangoli hanno complessivamente perimetro pari a quello dell'originario triangolo, ma altezza la metà. Si continua lo stesso procedimento con i due triangoli, e si ha una successione di triangoli, che sono 2^n all' n -esimo passo, con somma dei perimetri pari al perimetro dell'originario triangolo, ma con altezze pari a $1/2^n$ l'altezza dell'originario triangolo (vedi figura, dove c'è il primo passo ed il quarto); i lati obliqui di tali triangoli hanno lunghezze la cui somma è uguale alla somma delle lunghezze degli originari lati obliqui, dato che le basi si sommano alla lunghezza di AB .

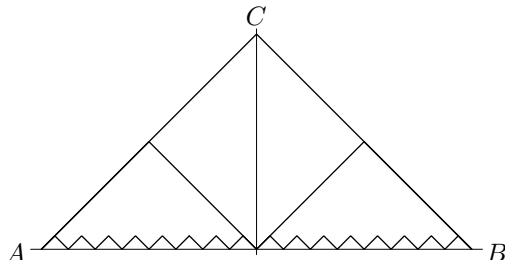


FIGURA 1. Triangoli.

Anche qui si può a buon diritto dire che la linea spezzata S_n formata dall'unione dei lati obliqui dei triangoli "tende alla base AB al tendere di n all'infinito", ma le lunghezze tendono ad una quantità $|AC| + |CB| > |AB|$.

Cosa c'è che non va? Molti di noi pretendono a livello più o meno cosciente che le funzioni che si trovano in natura siano continue. Quindi, visto che S_n tende ad AB , la lunghezza di S_n dovrebbe tendere alla lunghezza di AB , e questo non succede. Io aggiungo: per fortuna! se no ci sarebbe un groviglio di contraddizioni.

È senz'altro vero che in qualche senso S_n tende ad AB ; su questo Paolo Frigo ha dei dubbi, molto leciti e anzi opportuni. Tuttavia la nozione di tendenza di una successione di insiemi piani ad un altro insieme piano può essere resa precisa e rigorosa, l'ha fatto già Felix Hausdorff, uno dei padri fondatori della topologia generale, all'inizio del 1900, ed è indubbio che S_n tenda al segmento AB secondo questa definizione, che non riporto qui; accontentiamoci dell'intuizione.

Non è però vero che la lunghezza sia una funzione continua.

Ragioniamo un po' prima di prendercela con la divinità (è sempre pericoloso prendersela con chi è più forte di noi, ancor più se a torto). Abbiamo davvero il diritto di aspettarci che nel piano o nello spazio la lunghezza sia continua? se noi abbiamo un filo molto lungo e lo avvolgiamo strettamente attorno ad un bastoncino corto, bastoncino e filo sono molto vicini, ma nessuno di noi direbbe che hanno la stessa lunghezza, o lunghezze quasi uguali.

Anche la circonferenza, lodata perchè la sua lunghezza è limite delle lunghezze dei perimetri dei poligoni inscritti, avrebbe fatto brutti scherzi se si fosse provato ad approssimarla con perimetri di poligoni "a griglia" con i lati paralleli agli assi coordinati (poligoni le cui aree invece approssimano correttamente l'area del cerchio). La lunghezza sarebbe venuta pari a $8 \times$ raggio invece che a $2\pi \times$ raggio! (vedi poi un disegno illustrativo)

Il fatto è che in un dischetto, per piccolo che sia, ci sono curve la cui lunghezza è grande quanto si vuole, ed anche infinita. Tenendo fisso il centro C , e facendo tendere il raggio a 0, il dischetto tende al singolo $\{C\}$ che ha ovviamente lunghezza ed area nulla, ma dentro ogni dischetto ci sono curve lunghe quanto si vuole, che non si avvicinano ad alcun limite! e se si prende un rettangolo, si tiene fisso un lato, diciamo AB , e si fa tendere 0 la lunghezza dell'altro lato, il rettangolo tende al segmento AB , ma il suo perimetro tende invece a $2|AB|$ (l'area, correttamente, tende a 0): se ci fosse la continuità della lunghezza, allora $1 = 2!$

Sorgono forse altre questioni: per esempio, ha senso attribuire una lunghezza ad OGNI (ragionevolmente semplice) insieme piano? per esempio (uso la parola disco per un cerchio pieno, con tutti i punti interni) ha senso parlare della lunghezza di un disco? se la lunghezza deve rispettare quello che vogliamo da nozioni di questo tipo, cioè che se $A \subseteq B$ allora lunghezza di $A \leq$ lunghezza di B , per forza di cose la lunghezza di un disco, o di un qualsiasi insieme con punti interni, deve essere $+\infty$. Questo tipo di cose è stato studiato dal sopra citato Hausdorff, che ha anche definito le misure di dimensione frazionaria, quelle

dei famosi frattali, argomento che si collega a quanto stiamo discutendo. Ma forse è meglio abbandonare questi argomenti, che diventano molto tecnici se si vuole andare a fondo delle cose.

Spero di avere convinto che l'imbroglio è più apparente che reale; un'analisi un po' più accurata dell'idea ci fa capire che nascerebbero gravissime complicazioni e reali paradossi dalla continuità della lunghezza. Dio è sottile, ma non malizioso, e quello che si presenta come un imbroglio è invece la nostra salvezza dall'inferno delle antinomie!

IL CIRCOLO LUNGO OTTO VOLTE IL RAGGIO

Le due figure sotto sono state così ottenute:

- L'arco è un quarto di circonferenza di raggio R ;
- si divide il raggio orizzontale in n segmenti di uguale lunghezza;
- si considerano i punti sull'arco di circonferenza ottenuti tirando da tali punti le parallele al secondo raggio;
- coppie di punti consecutivi sull'arco di cerchio vengono congiunte non con il segmento, ma con due segmenti, uno orizzontale e uno verticale, come si vede dalle figure;

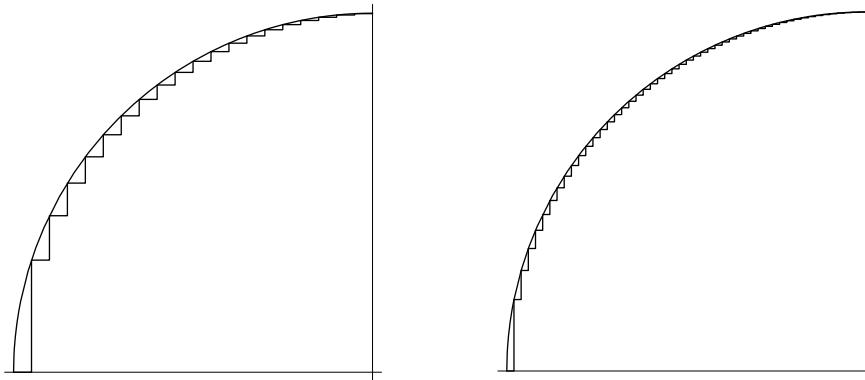


FIGURA 2. $n = 20$ ed $n = 50$

Si comprende che le spezzate così ottenute hanno tutte la stessa lunghezza $2R$: i segmenti orizzontali hanno complessivamente lunghezza R , e così quelli verticali. Si comprende anche che al tendere di n all'infinito le spezzate "tendono" all'arco di cerchio (vedi sotto). Il quarto di cerchio è lungo $2R$?

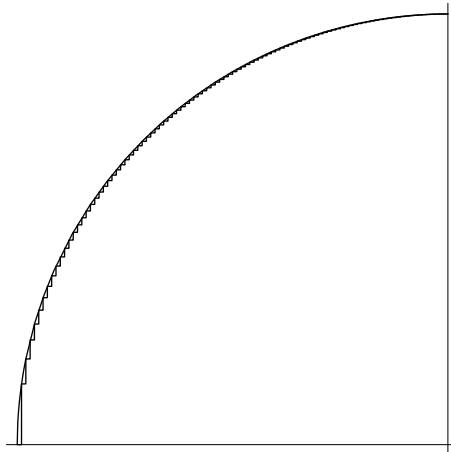


FIGURA 3. $n = 100$.