14/11/2007

L'IPOTESI MANCANTE

In uno dei libri in uso presso il nostro liceo è riportato il teorema sulla somma dei limiti nel caso in cui due funzioni reali di variabile reale f(x) e g(x) ammettano limiti finiti in un punto.

Dopo aver riportato l'esempio delle funzione f(x)= 2x-6 e g(x) =x+3 per le quali risulta
lim (2x-6)=2 e lim (x+3)=7 e dopo aver mostrato che lim [f(x)+g(x)] = lim (3x-3) =9
x à 4 x à 4 x à 4 x à 4
il testo prosegue tranquillamente dicendo che In generale si può dimostrare il seguente teorema:
Se lim f(x) =l e lim g(x) =m , dove l,m $\in$ R allora lim [f(x)+g(x)] =l+m
x à c x à c x à c

In realtà bisogna dire che per la validità di questo teorema occorre che le funzioni f(x) e g(x) rispettino una ipotesi aggiuntiva molto importante che il testo non considera.

Le domande che questo "lancio" pone a coloro che sapranno rispondere sono le seguenti:

1°) Quale è l'ipotesi trascurata dal libro di testo?

2°) Trovare due funzioni per le quali il teorema, così come è stato presentato, non è valido.

Oggi è il giorno 2/12/2007 ed è arrivato il momento di esporre la soluzione di questo lancio che ha sollevato molta curiosità e qualche discussione. Sono arrivate molte risposte (molto imprecise) ed una sola apprezzabile. Ce l' ha mandata Bortolotto Matteo che, udite, udite, si è iscritto alla facoltà di matematica a Trento facendo felici tutti quelli che ne conoscono le capacità.
Prima di tutto occorre dare una definizione rigorosa del concetto di Limite finito in un punto, di una funzione reale di variabile reale . Eccola:

Siano dati una funzione definita su un sottoinsieme X della retta reale ed un punto di accumulazione x_0 di X.
Un numero reale *l* è il limite di f(x) per x tendente a x_0 se la distanza fra f(x) ed l può essere resa arbitrariamente piccola per tutti gli $x \neq x_0$ appartenenti sia al dominio X che ad un opportuno intorno di x_0.
La distanza fra i punti è misurata usando il valore assoluto della differenza: quindi $|x - x_0|$ è la distanza fra x e x_0 e $|f(x) - l|$ è la distanza fra $f(x)$ ed l. Il concetto di "arbitrariamente piccolo" è espresso formalmente con i quantificatori "per ogni" (quantificatore universale) ed "esiste" (quantificatore esistenziale).

Formalmente

l è il limite di f(x) per x che tende ad x_0, e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale positivo δ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$.

Una definizione equivalente che usa gli intorni è la seguente:

l è il limite se per ogni intorno U di l in R esiste un intorno V di x_0 in R tale che f(x) appartiene a U per ogni $x \neq x_0$ in $V \cap X$.

Come si può notare questa definizione è molto diversa da quest'altra, presente in molti testi scolastici:

Si dirà che la funzione y=f(x) ammette limite per x che tende a "c" e questo limite è "l" se dato un numero $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intorno H di c tale che per ogni $x \in H - \{c\}$ valga la relazione $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Secondo questa definizione imprecisa non basta che "c" sia un punto di accumulazione per il dominio ma viene preteso implicitamente anche che f(x) sia definita in tutto $H - \{c\}$, pretesa che limita arbitrariamente l'insieme delle funzioni studiabili.

Ecco quindi due funzioni che rispondono al quesito posto nel lancio:

Sia f(x) = x una funzione reale di variabile reale definita su Q e sia g(x)=x una analoga funzione definita in R-Q (definita sugli irrazionali). Si può notare che :

1°) Qualsiasi numero reale, razionale o irrazionale, è punto di accumulazione sia per il dominio di f(x) che per il dominio di g(x) ;

2°) Qualsiasi sia il punto x_0 esistono e sono finiti i due limiti $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = x_0$;

3°) Questo limite coincide con il valore assunto dalla funzione solo se x_0 appartiene al suo dominio che è Q per f(x) ed è R-Q per g(x). Le due funzioni sono quindi continue in ogni punto in cui esistono ma dove ne esiste una non esiste quell'altra e quindi la loro somma f(x)+g(x) non esiste in alcun punto di R.

4°) Per queste due funzioni il teorema sulla somma dei limiti, così come è espresso nel "lancio che parla di ipotesi mancante", non è valido perché, pur esistendo i limiti: $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = x_0$ non esiste la somma f(x)+g(x) e quindi neanche il suo limite.

Un secondo esempio, forse più comprensibile, è il seguente:

Consideriamo i seguenti insiemi, $D = \{x \mid x = 1/(2n);\ n \in Z;\ n \neq 0\}$; ed $E = \{x \mid x = 1/(2n+1);\ n \in Z\}$;
Consideriamo ora le due funzioni f(x)=sen(x) definita in D e g(x) =cos(x) definita in E.
Si può notare che $x_0 = 0$ è l'unico punto di accumulazione sia per D che per E ma non lo è per il dominio di f(x)+g(x) che è $D \cap E = \varnothing$.
Per queste due funzioni risulta $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ ma non è vero che $\lim_{x \to 0} (f(x)+g(x)) = 1$.

E BORTOLOTTO COSA HA DETTO?

Ciao Toni…..

Ecco vedi, questo è un problema che risolvo agilmente con quello che ci hanno fatto fare nei primi corsi dell'università. Nella definizione di una funzione rientrano anche domino e codominio…….. D'altro canto la somma di due funzioni ha per domino l'intesezione dei due domini. Se prendo f(x)= $\sqrt{x}$ **e g(x)** $\sqrt{-x}$ **definite rispettivamente nei domini {x appartenente R tali che x>0} e in {x appartenente R tali che x<0}, allora (f(x)+g(x)) non ha domino, quindi non ha limite malgrado** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ **e** $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

L'unica contestazione a questo ragionamento, che comunque dimostra di aver centrato il problema nella sua prima domanda, è dovuta al fatto che per x→0 la funzione f(x) di Bortolotto ammette solo limite destro e l'altra ammette solo limite sinistro mentre si sa che per l'esistenza del limite occorre che esiste il destro ed il sinistro e che questi coincidano.

L'ipotesi mancante per la validità del teorema è quindi quella che garantisce l'esistenza della somma f(x)+g(x) in un dominio comune per il quale x_0 sia punto di accumulazione.

L'enunciazione corretta del teorema è quindi la seguente:

Se c è punto di accumulazione per il dominio comune di due funzioni f(x) e g(x) e se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ **e** $\lim_{x\to c} g(x) = m$ **, dove** $l,m \in R$ **allora** $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = l+m$

Preannuncio uno sviluppo interessante di questa questione. Vedremo cosa succede per la difinizione di derivata, ma bisogna aspettare almeno Gennaio perché i programmi scolastici liceali non hanno ancora approfondito questo concetto.