lancio del 12/5/2007

EQUAZIONI NON EQUIVALENTI

Sia A(x)=B(x) una equazione nella variabile reale x nella quale figurino moduli o radicali che coinvolgono la x in uno o in entrambi i membri. Spostando all'occorrenza alcuni termini da un membro all'altro ed elevando una o più volte al quadrato i suoi due membri si supponga di poter eliminare moduli e radicali e porla sotto la forma razionale intera P(x)=Q(x).

Si dimostri che se l'equazione iniziale A(x)=B(x) aveva INFINITE soluzioni in R allora P(x)=Q(x) è una identità verificata da TUTTI i numeri reali.

Per meglio capirci porto un esempio banale ed uno un pò più complesso.

Primo esempio:
L'equazione $|x| = -x$ **è verificata per** $x \le 0$ **ma se elevo al quadrato i due membri ottengo** $x^2 = x^2$ **che è vera per ogni x.**

Secondo esempio:
L'equazione $3 - |2x-1| = x - |x+2|$ **è verificata per x=3 e per x**≤ -2.
Spostando i moduli a sinistra ed il 3 a destra si ottiene:
$|x-2| - |2x-1| = x-3$.
Elevando al quadrato i due membri e mantenendo a sinistra solo i moduli si ottiene la nuova equazione :
$-2|x+2||2x-1| = -4x^2 - 6x + 4$.
Elevando nuovamente al quadrato i due termini si arriva alla identità:
$16x^4 + 48x^3 + 4x^2 - 48x + 16 = \ 16x^4 + 48x^3 + 4x^2 - 48x \ + 16$

Mandatemi le vostre soluzioni e pensate al dilemma posto nel lancio TUTTO E INFINITO. Le equazioni di questo lancio forse vi potranno aiutare a prendere una decisione.

Oggi è il giorno 27/5/07 ed è ora di esporre la soluzione che già il primo giorno ci ha illustrato il prof.Amedeo Zeni. Ho atteso alcuni giorni ma gli alunni non hanno mandato nulla anche se molti hanno espresso qualche perplessità sul problema. Paolo Frigo, per esempio, mi ha detto che non si può elevare tranquillamente al quadrato i due membri di una equazione.
E' proprio qui il nocciolo della questione! Elevando al quadrato ambo i membri di una equazione f(x) = g(x) se ne ottiene una nuova che ha tutte le soluzioni della precedente ma anche quelle di f(x)=-g(x). Il numero delle soluzioni quindi non diminuisce ma se ne possono trovare in più alcune ''intruse'' che devono essere scartate attraverso una verifica diretta.

Il nostro lancio ipotizza una equazione A(x)=B(x) dotata di infinite soluzioni reali e la trasforma, con procedimenti ''a rischio'' in una razionale intera P(x)=Q(x) che per quanto detto sopra avrà ancora infinite soluzioni. Ma come la mettiamo con il teorema fondamentale dell'algebra che impone ad una tale equazione di avere al massimo tante soluzioni reali quante ne indica il suo grado? Evidentemente P(x)=Q(x) non è una equazione ma una identità che presenta al primo ed al secondo membro polinomi uguali ed è riducibile alla forma 0=0. L'uguaglianza a cui si perviene è verificata quindi da tutti i numeri reali e non solo da infiniti numeri reali. con questo esempio si capisce che almeno parlando dei numeri reali dire ''tutti'' e dire ''infiniti'' non è dir la stessa cosa. Vi rimando quindi al Lancio ''Tutto e Infinito'' dove è posta una questione analoga.