La stereometria secondo Euclide

Libro XI

- 28 termini (definizioni)
- 39 proposizioni.
- Le prop.1, 2, 3, sono dimostrazioni di proprietà caratteristiche del piano
- Le prop. 4-19 sono dimostrazioni di proprietà e problemi sul parallelismo e sulla perpendicolarità di rette e piani.
- Le proposizioni 20-23,26, 35 riguardano proprietà e problemi degli angoloidi
- tutte le altre proposizioni sono dedicate ai parallelepipedi e in particolare ai parallelepipedi simili.

I Termini

Term.1

Solido è ciò che ha lunghezza, larghezza , altezza.

Term.2

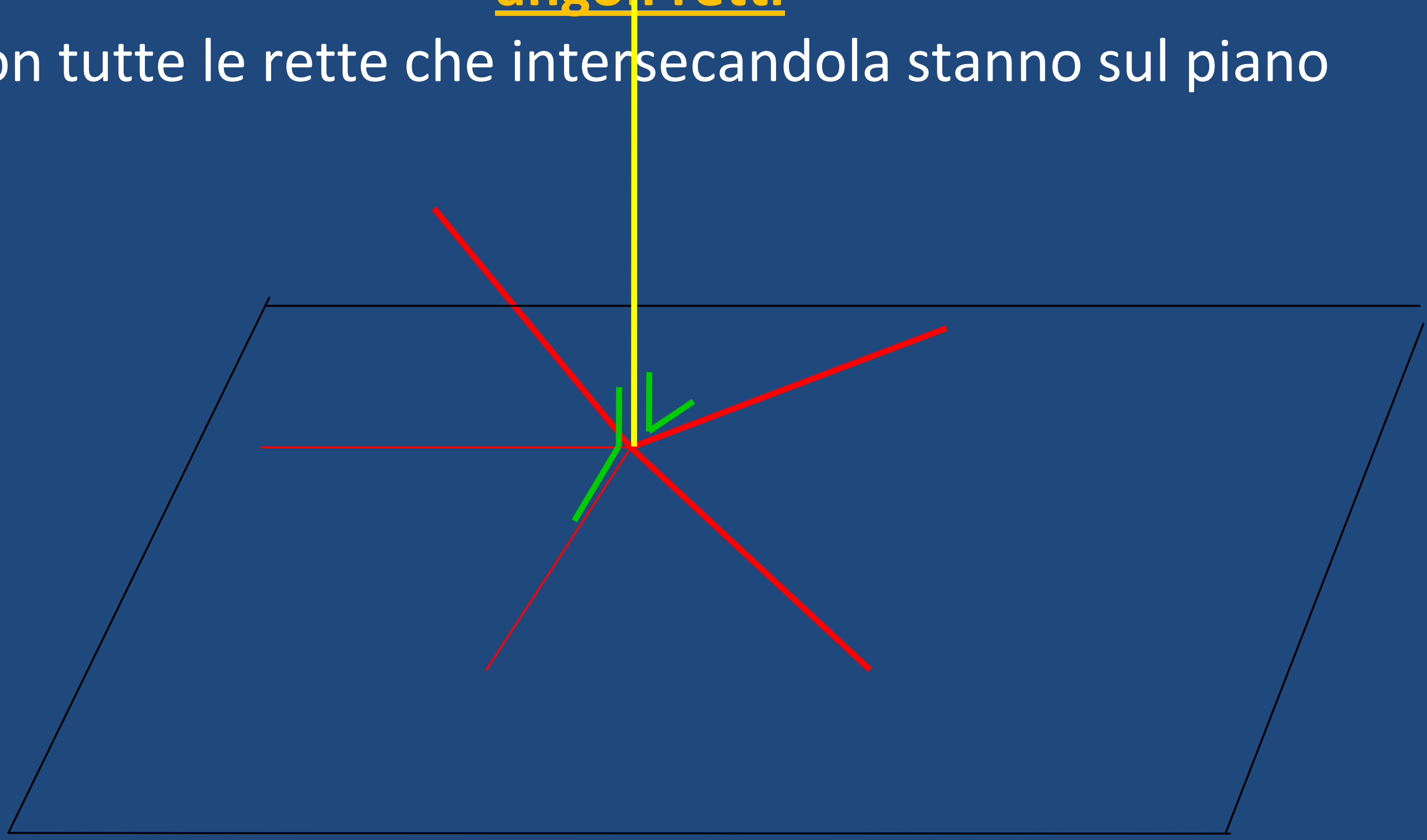
Termine del solido è la superficie

Term.3

Una **retta è perpendicolare a un piano** se forma

angoli retti

con tutte le rette che intersecandola stanno sul piano



Term.4

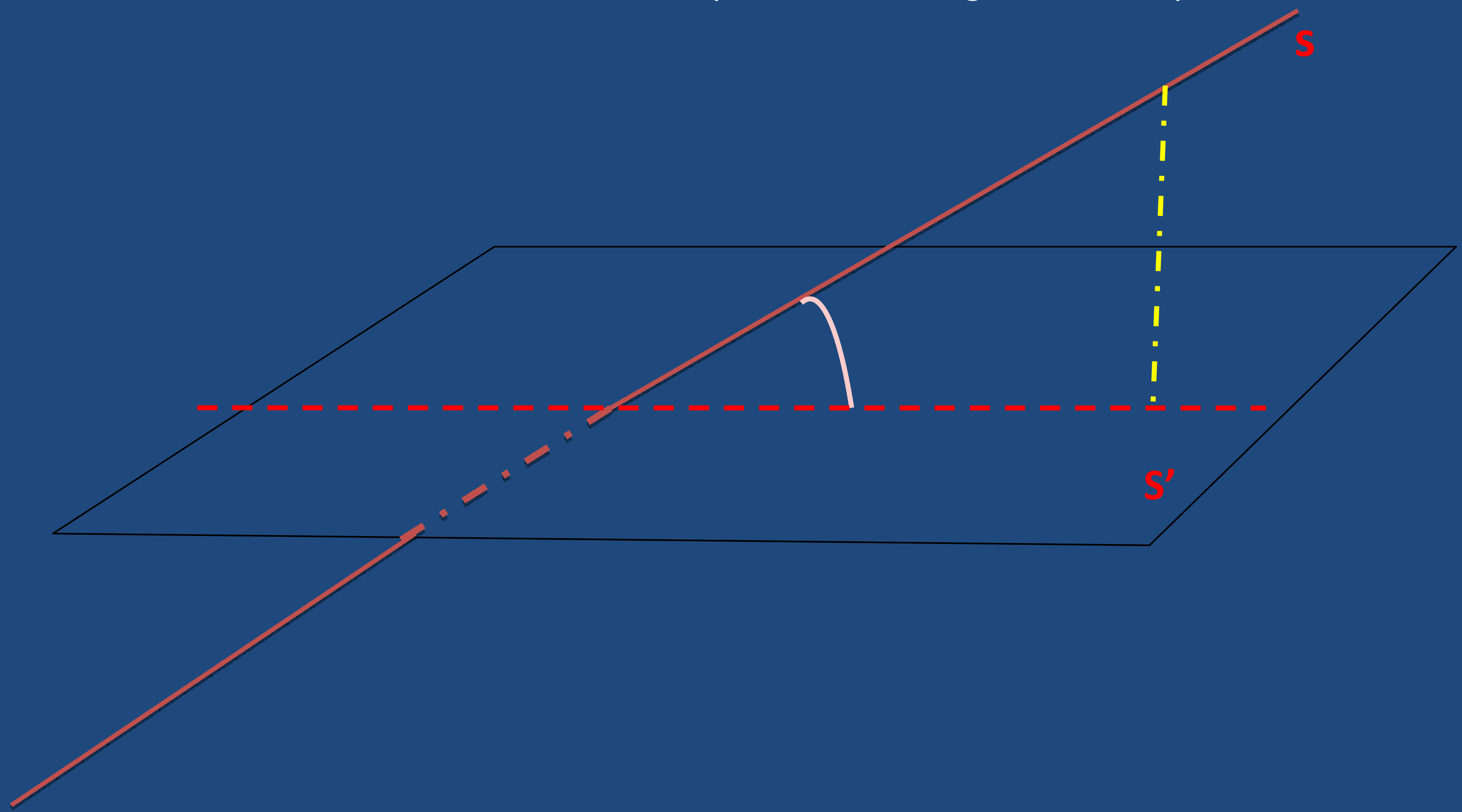
Due piani sono tra loro perpendicolari quando
tutte le rette di un piano, perpendicolari alla loro comune intersezione, sono perpendicolari all'altro piano

Term.5

Si dice **inclinazione di una retta s su di un piano**

l’angolo acuto s s’

formato dalla retta **s** e dalla sua proiezione ortogonale **s’** sul piano



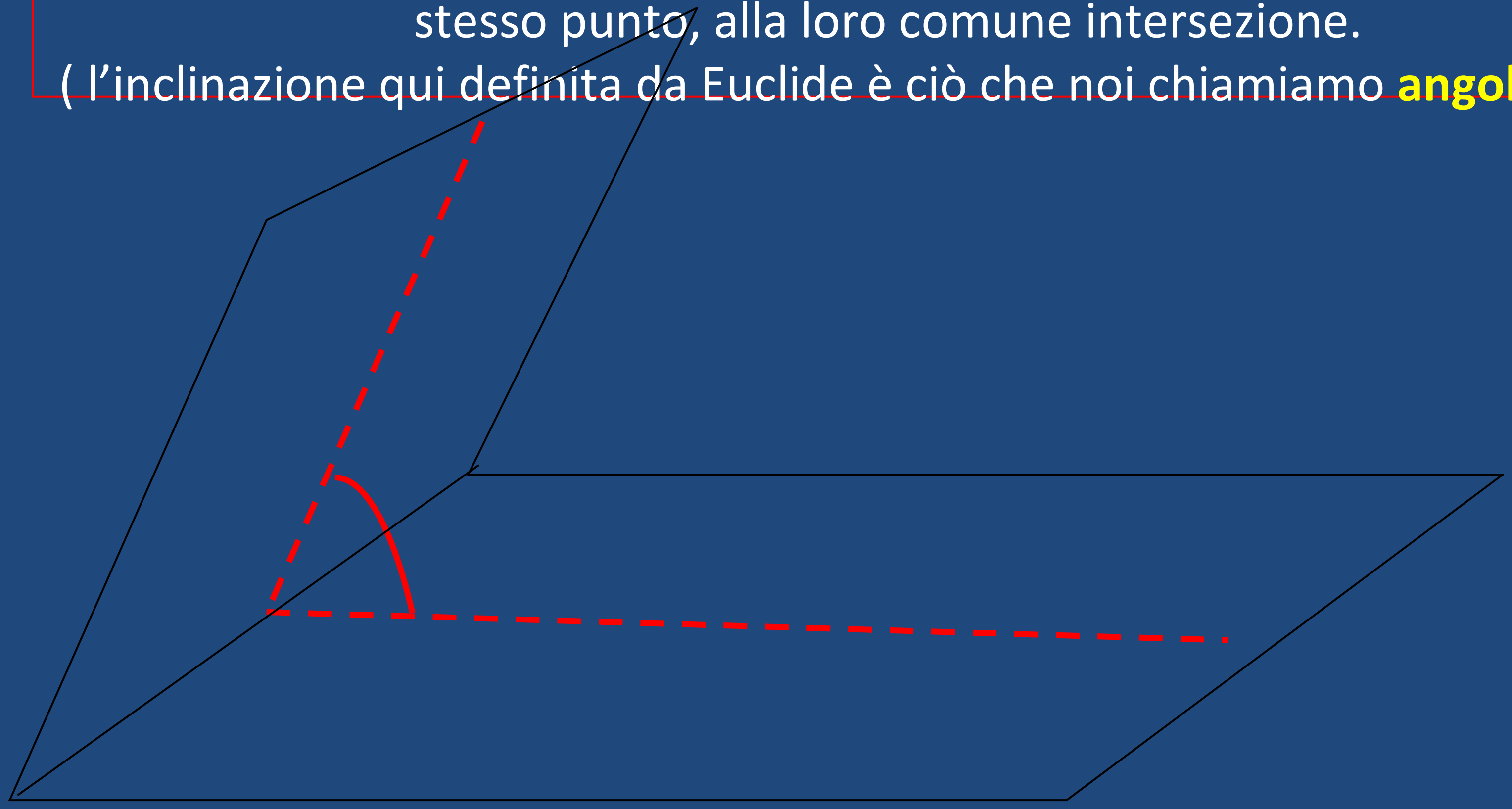
Term.6

Inclinazione tra due piani è

l’angolo acuto

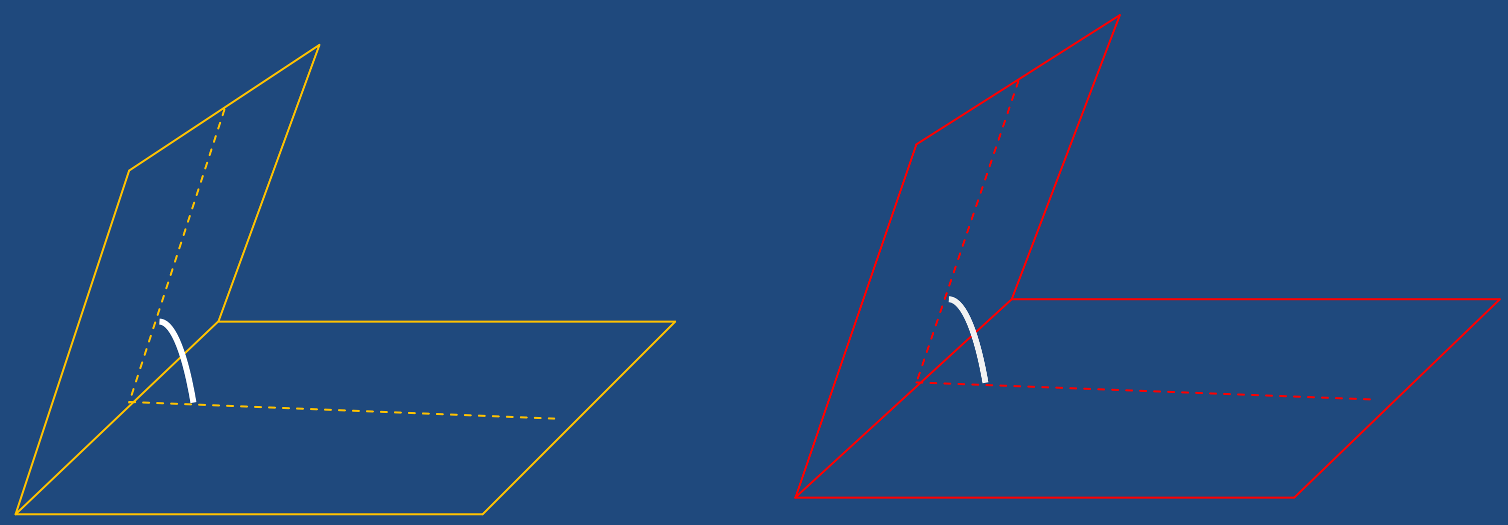
compreso tra due **rette perpendicolari**, condotte in ciascuno dei piani ad uno stesso punto, alla loro comune intersezione.

(l’inclinazione qui definita da Euclide è ciò che noi chiamiamo **angolo diedro**)



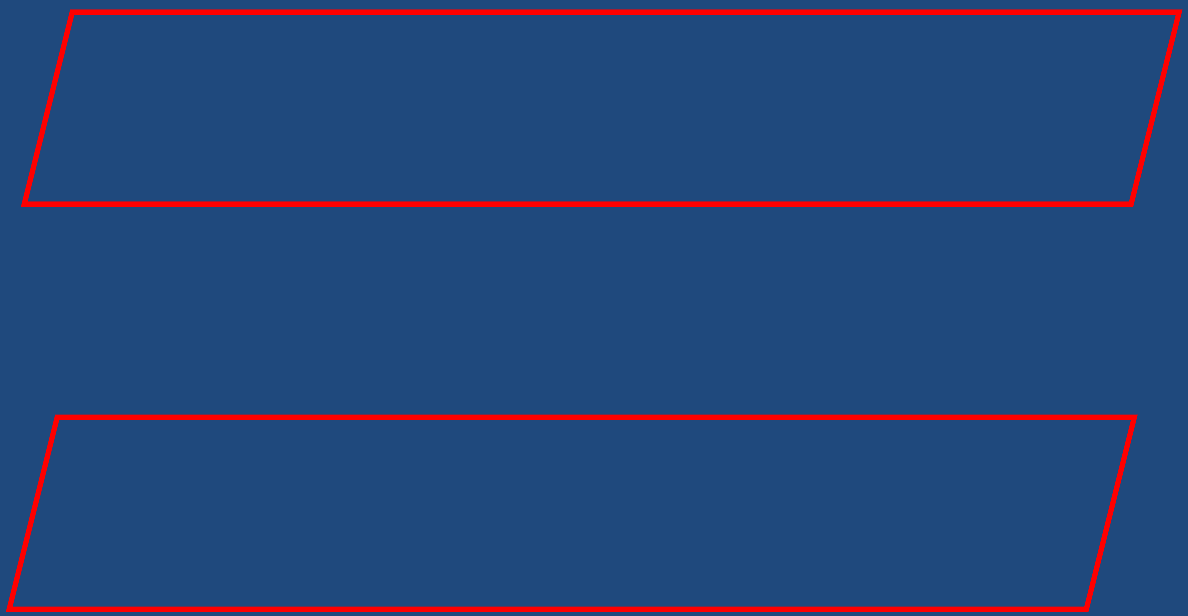
Term.7

Due coppie di piani sono **similmente inclinati** quando i loro angoli di inclinazione sono uguali



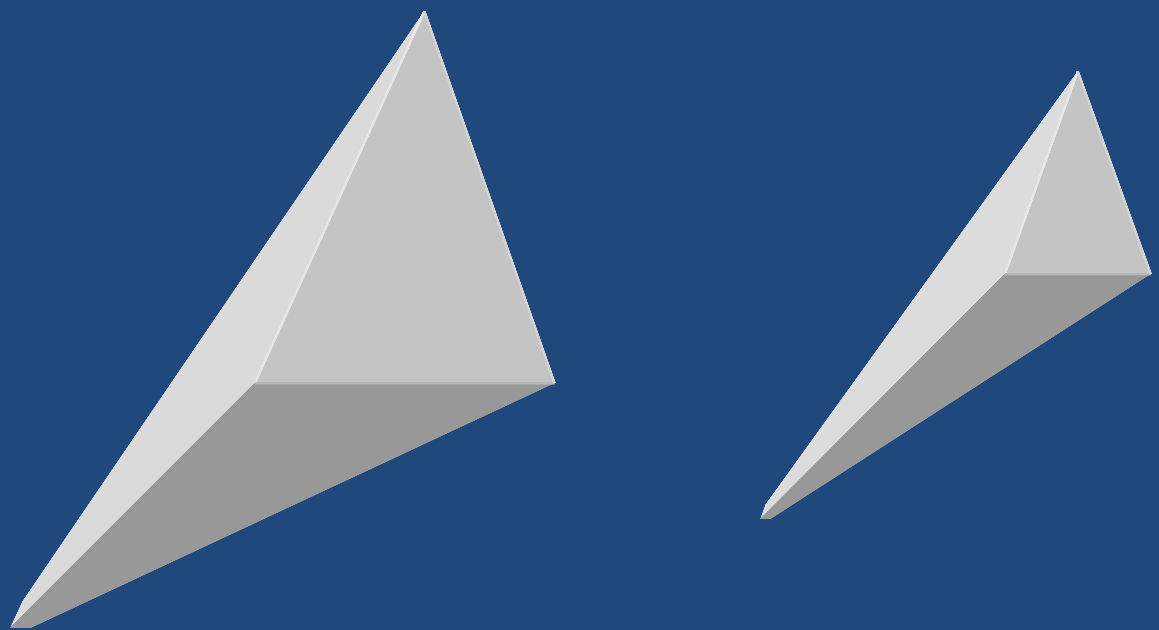
Term.8

Piani paralleli sono quelli che non hanno intersezione



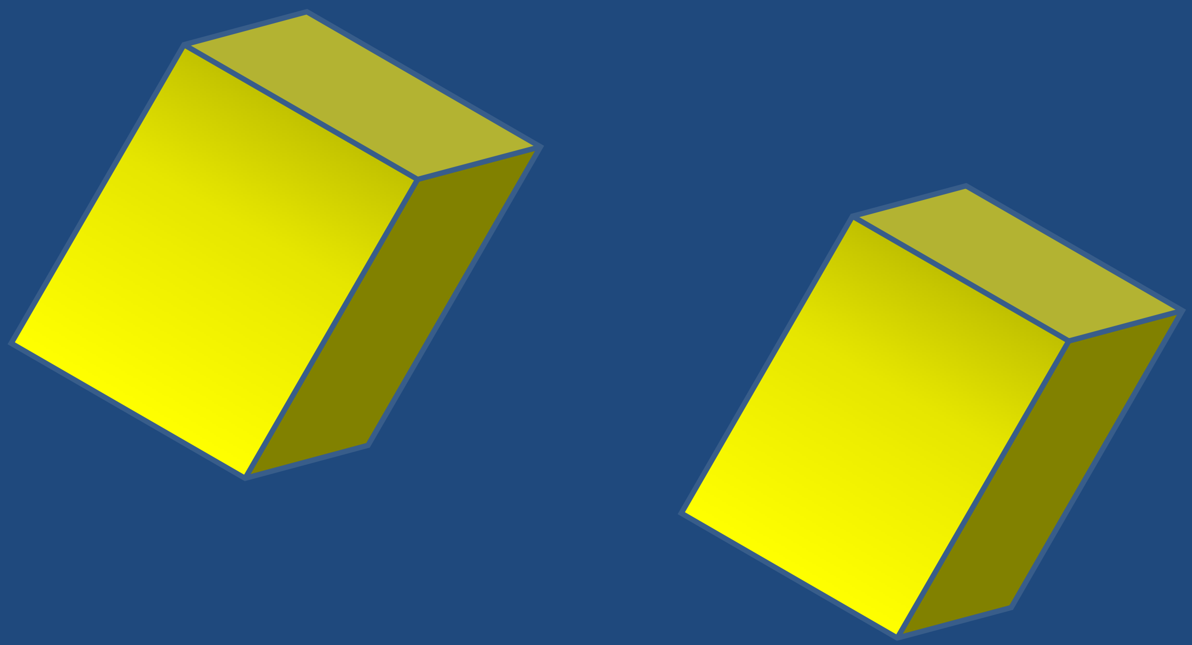
Term.9

Due **figure solide** sono **simili** se
sono racchiuse da un **uguale numero di piani simili**



Term.10

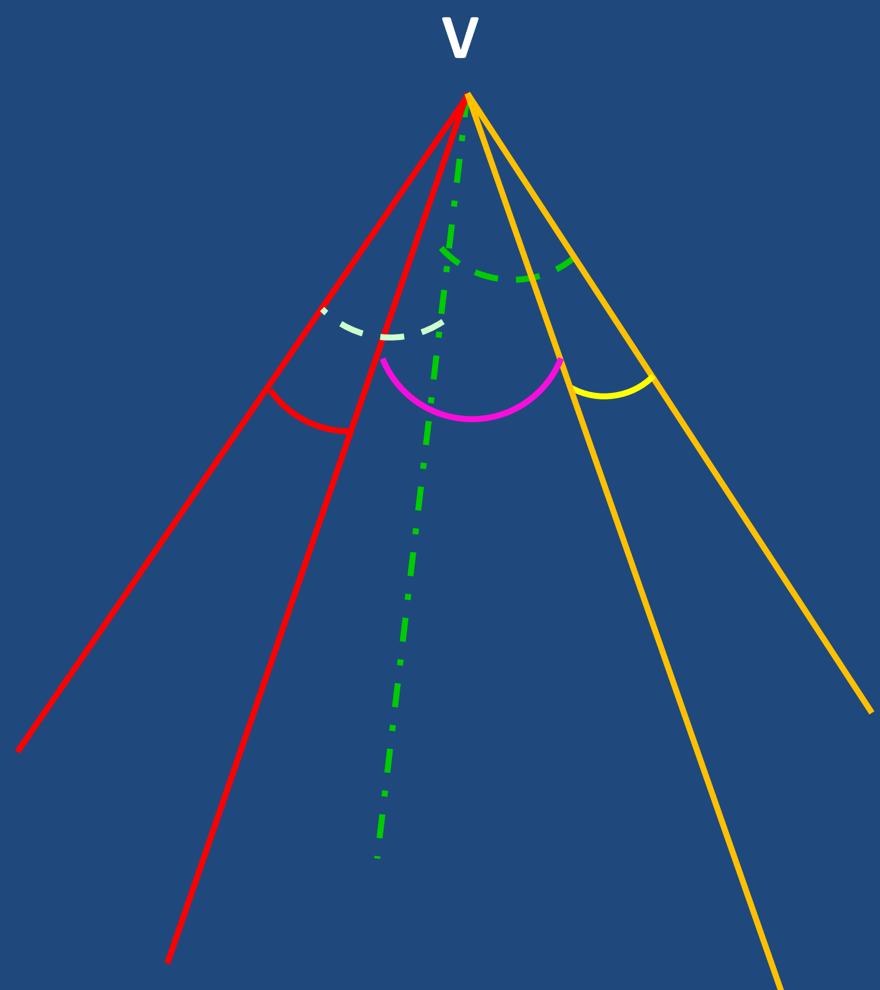
Due figure solide sono **simili e <u>uguali</u>** se sono racchiuse da **piani simili e <u>uguali</u>**



Term.11

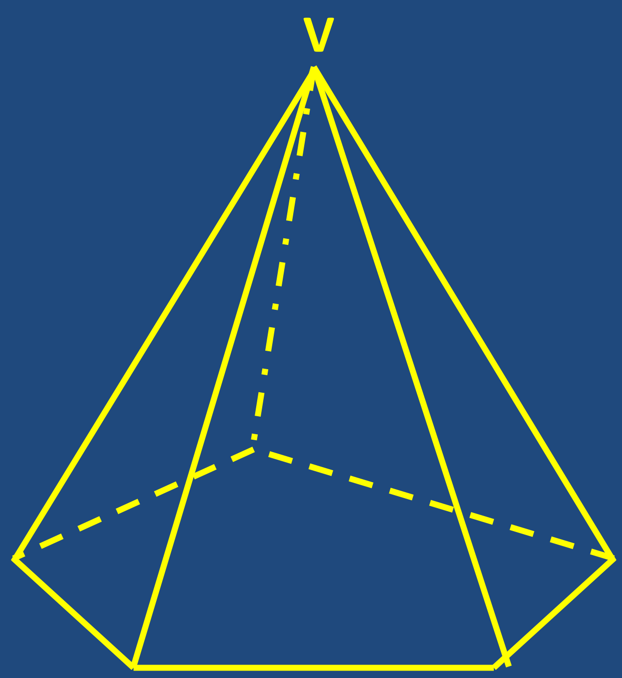
Angolo solido

è ciò che è racchiuso **da più di due angoli piani** non giacenti nello stesso piano e aventi lo stesso vertice.



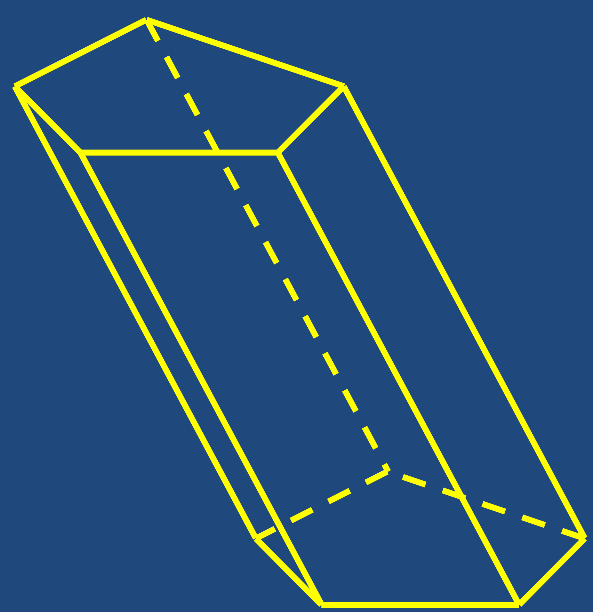
Term.12

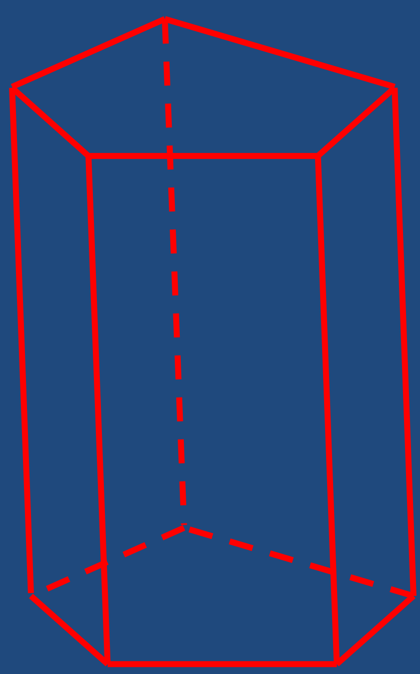
Piramide è la figura solida
racchiusa da piani che, da un piano, concorrono in un punto



Prisma

è la figura solida racchiusa da piani dei quali
-- due opposti sono simili, uguali e paralleli, e
-- i rimanenti sono parallelogrammi

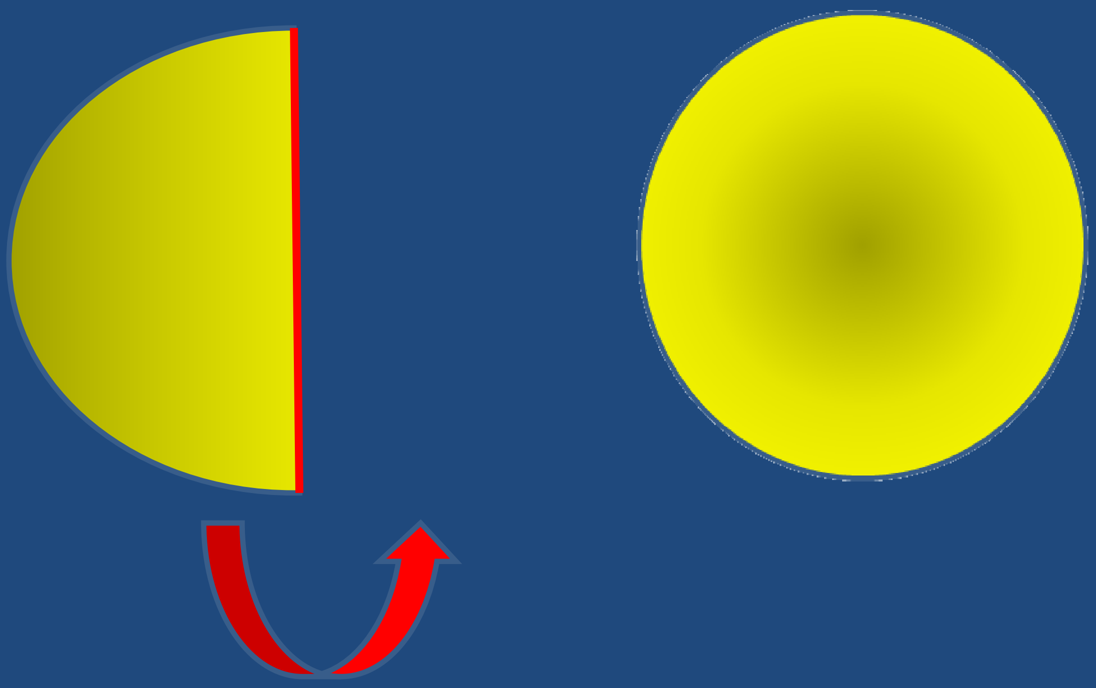




Term. 14 -15-16-17

Sfera

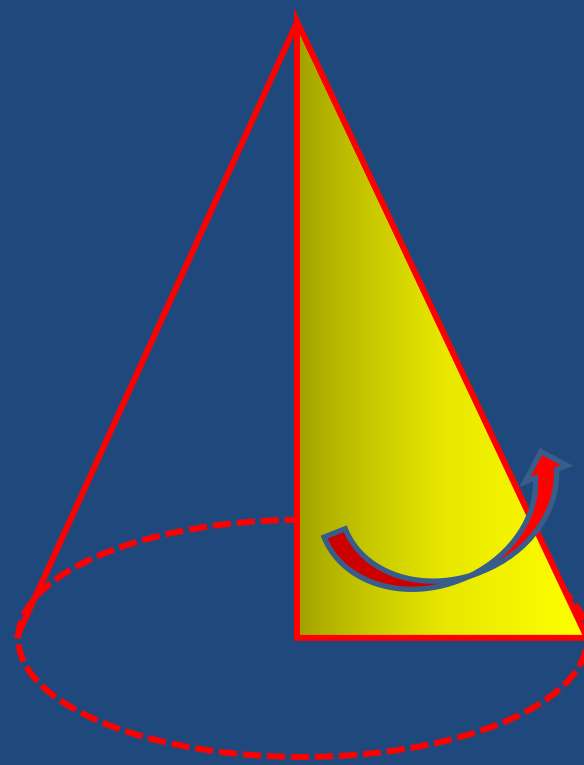
è la figura che si genera allorché si fa ruotare di un giro completo un semicerchio attorno al diametro



Term. 18-19-20

Cono

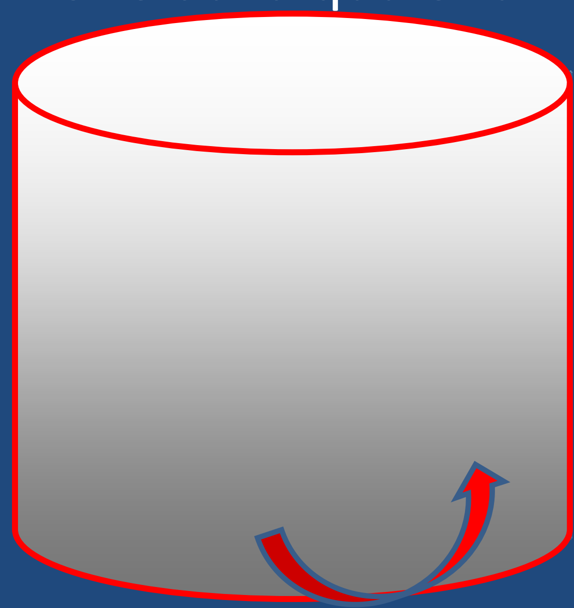
è la figura solida che si genera allorché, tenendo fisso in un triangolo rettangolo un lato, si fa ruotare di un giro completo il triangolo



Term. 21- 22-23

Cilindro

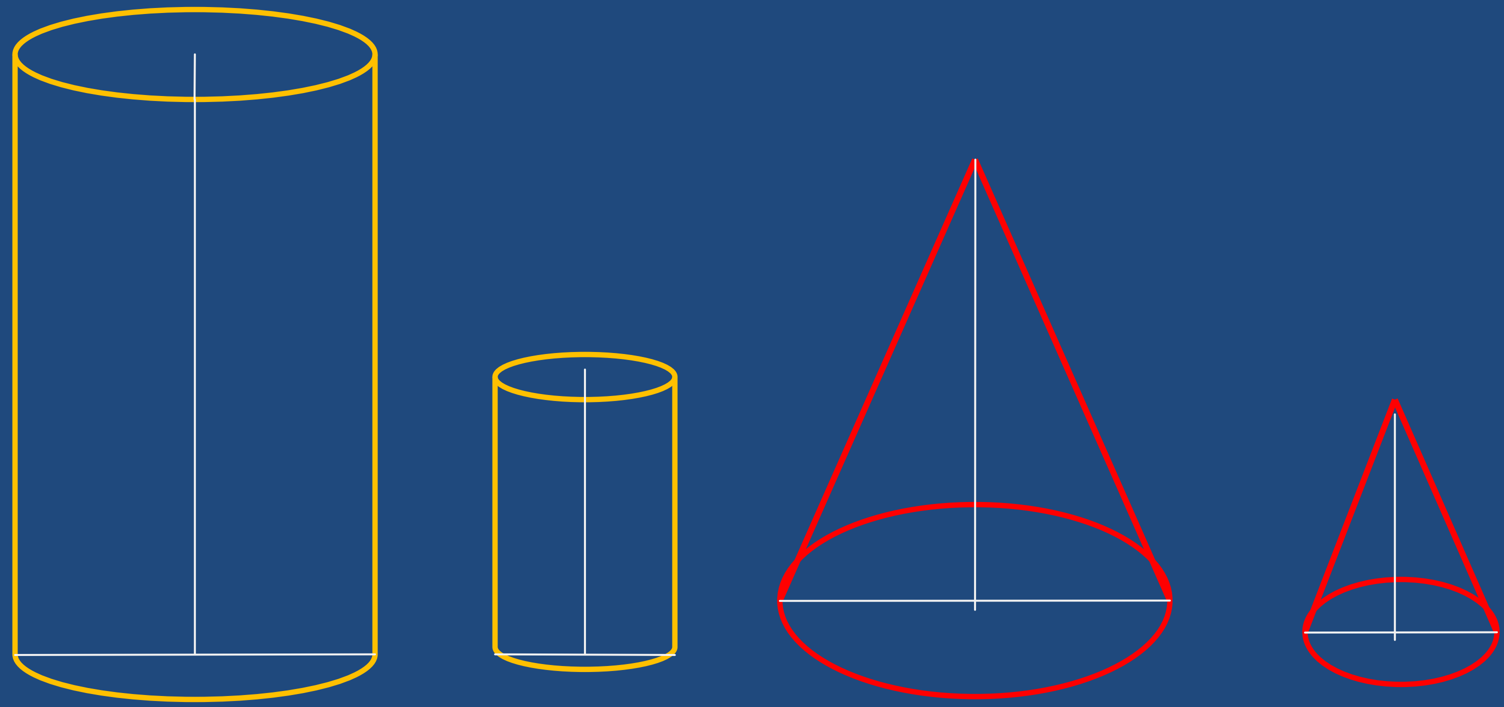
è la figura solida che si genera allorché,
tenendo fisso uno qualunque dei lati comprendenti un angolo retto di un parallelogramma,
si fa ruotare il parallelogramma intorno ad esso fino a che non ritorni nella stessa posizione dalla quale fu mosso.



Term. 24

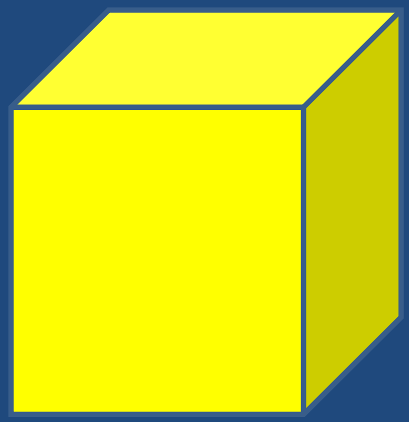
Coni e cilindri simili
sono quelli dei quali

gli assi e i diametri delle basi sono proporzionali.



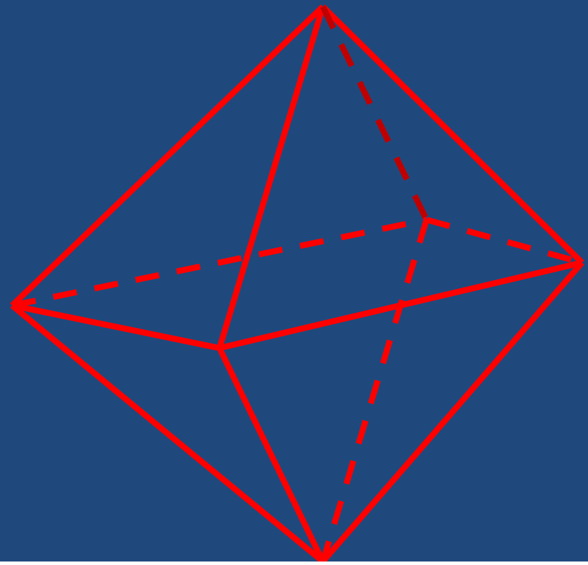
Term.25

Cuboè la figura solida racchiusa da **sei** quadrati uguali



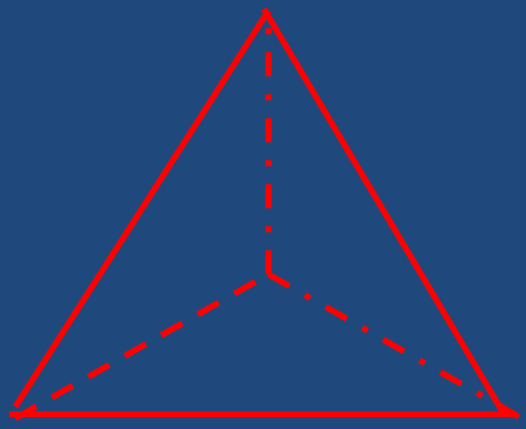
Term. 26

Ottaedro è la figura solida racchiusa da otto triangoli uguali ed equilateri



Tetraedro

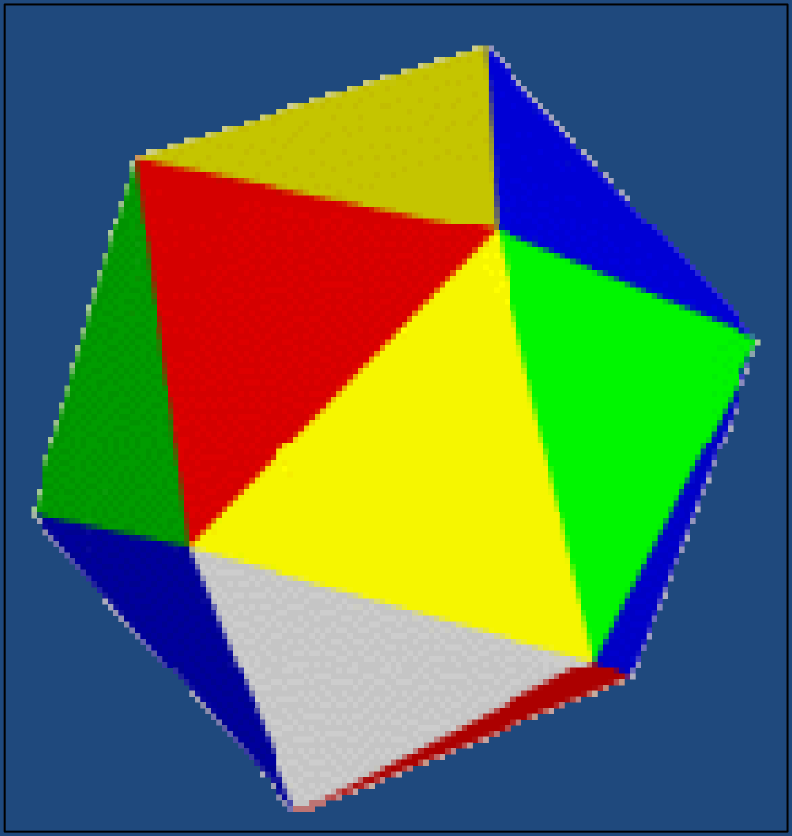
è la figura solida racchiusa da sei triangoli uguali e equilateri



Term. 27

Icosaedro

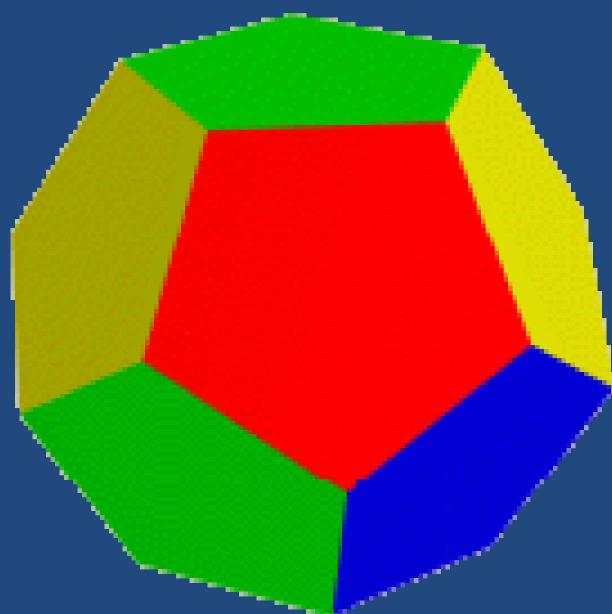
è la figura solida racchiusa da **venti triangoli** uguali ed equilateri



Term.28

Dodecaedro

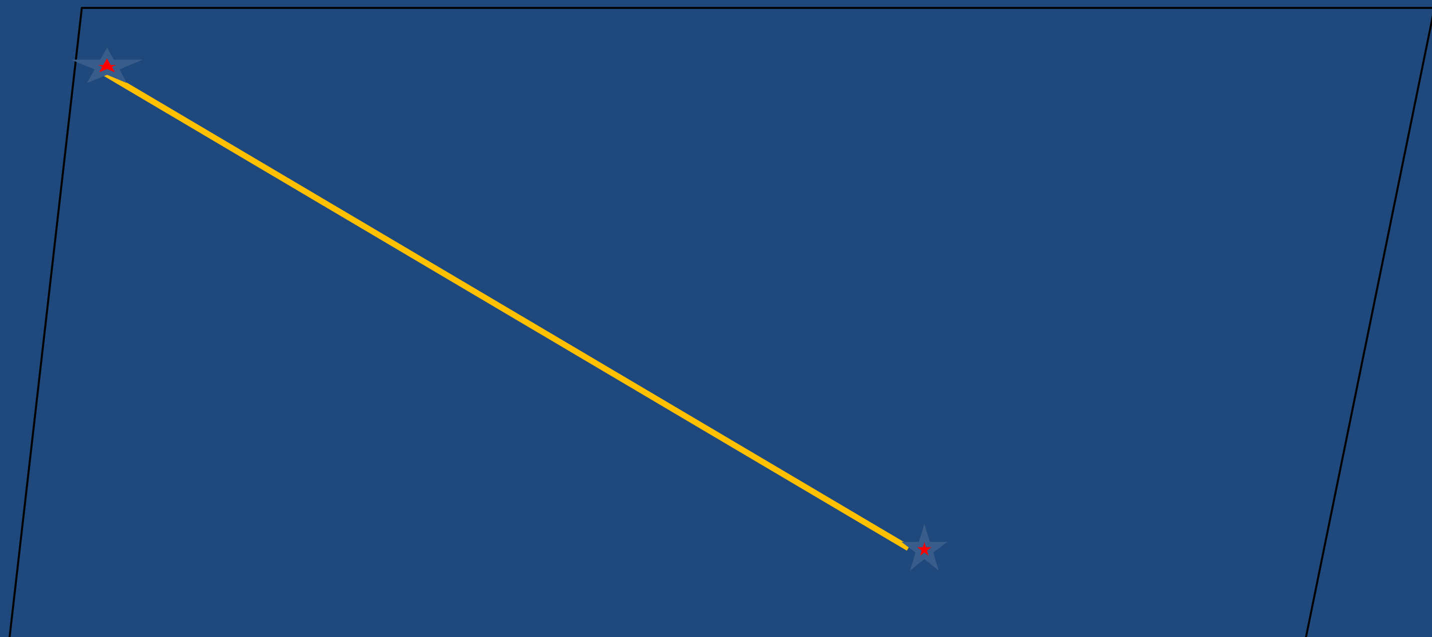
è la figura solida racchiusa da **dodici pentagoni** uguali ed equilateri ed equiangoli



Le Proposizioni

Prop.1

Se una retta ha in comune due punti con un piano allora è tutta contenuta nel piano medesimo

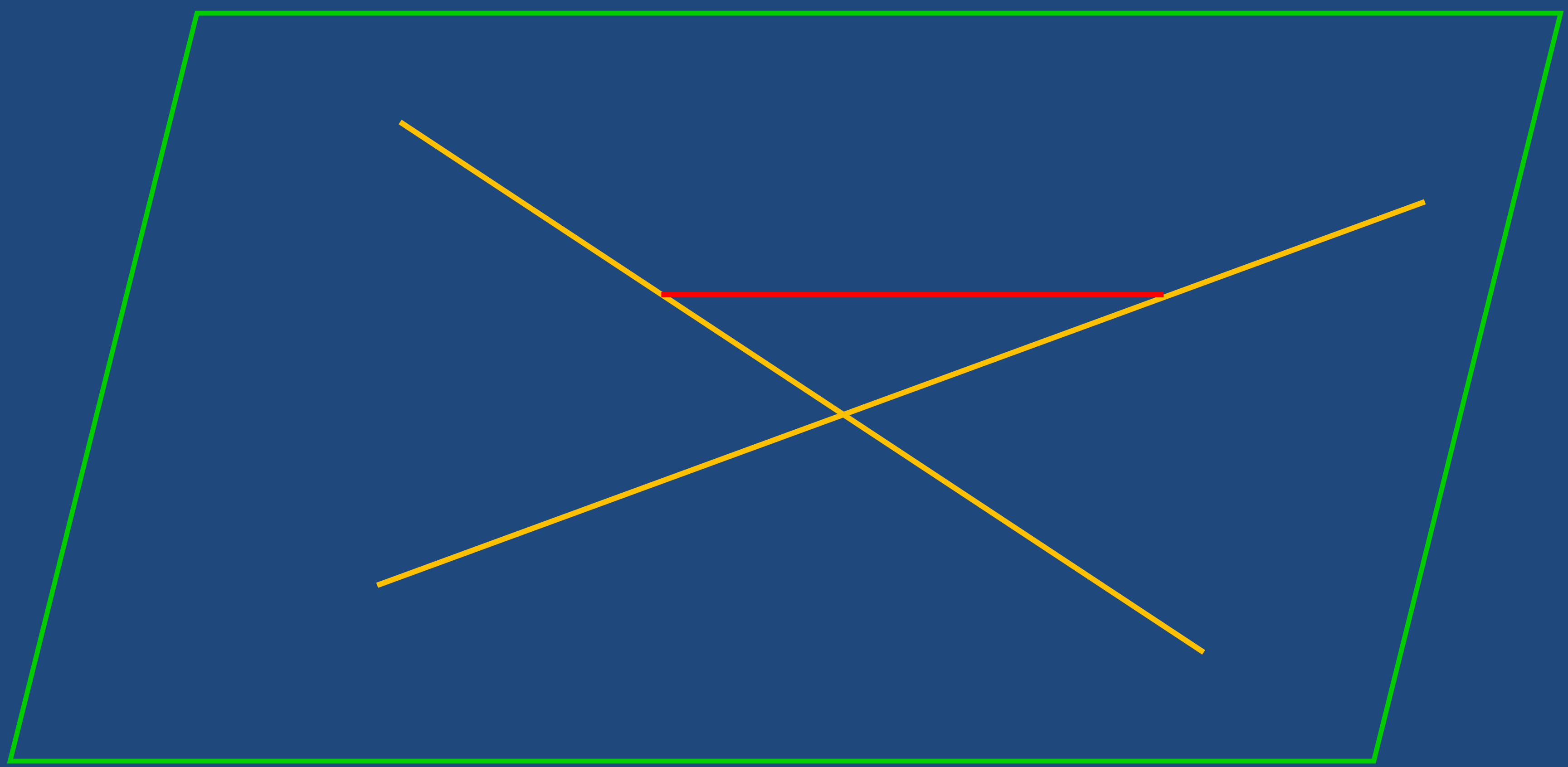


Prop.2

Se **due rette si intersecano** allora

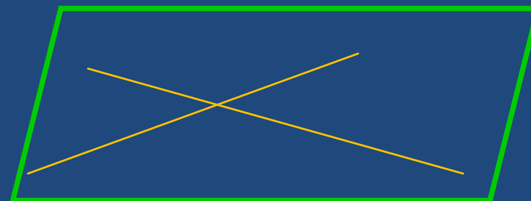
-- **appartengono ad uno stesso piano** e

-- **ogni triangolo di cui esse costituiscono due lati è nel piano.**

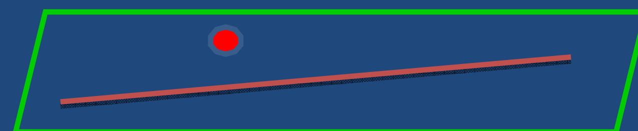


Da questa proposizione si ha che un piano è univocamente determinato da:

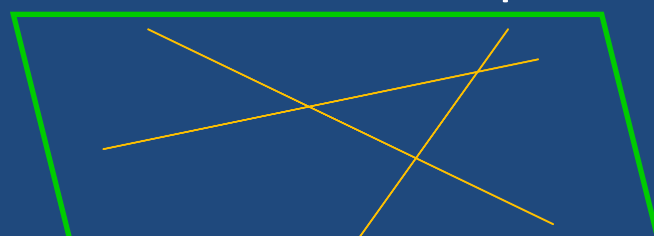
-- Due rette intersecantesi



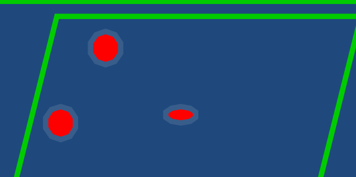
--Una retta e un punto fuori da essa



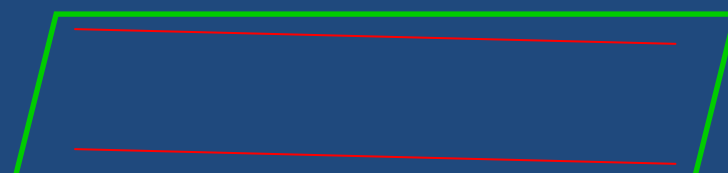
--Tre rette intersecantesi a due a due e non passanti per uno stesso punto



-- Tre punti non in linea retta

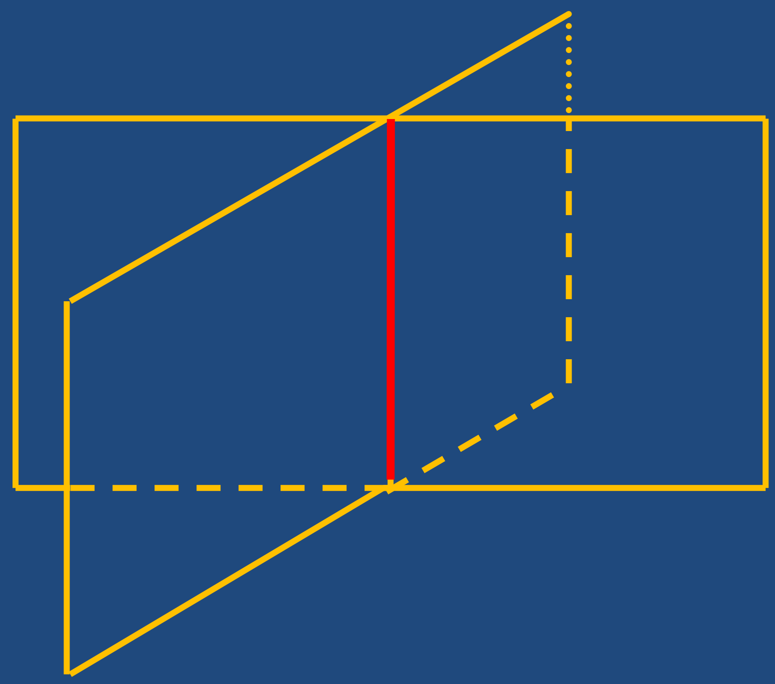


-- Due rette distinte e parallele



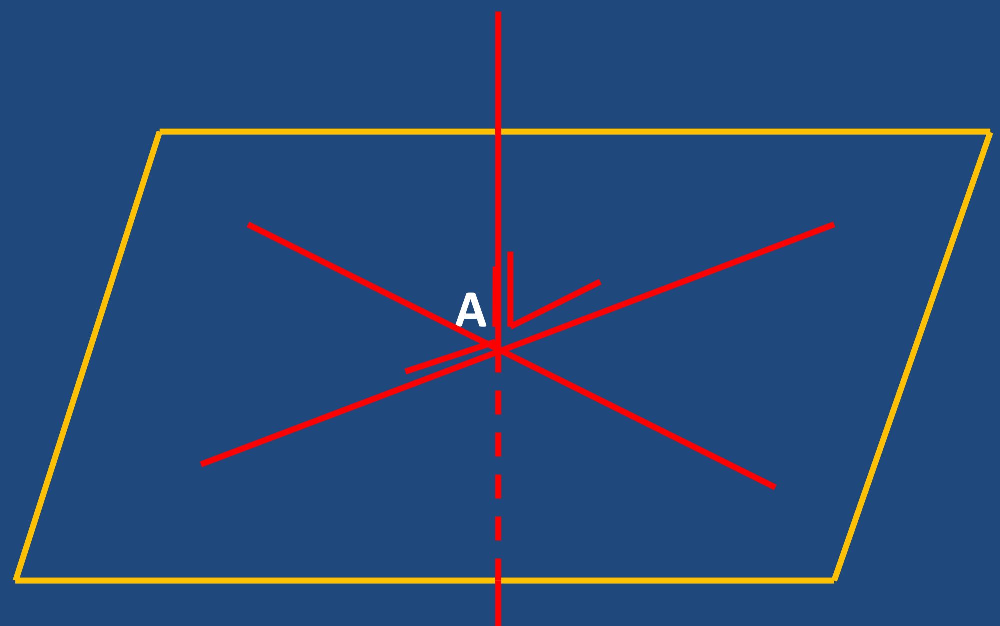
Prop.3

Se due piani si intersecano allora la loro intersezione è una retta

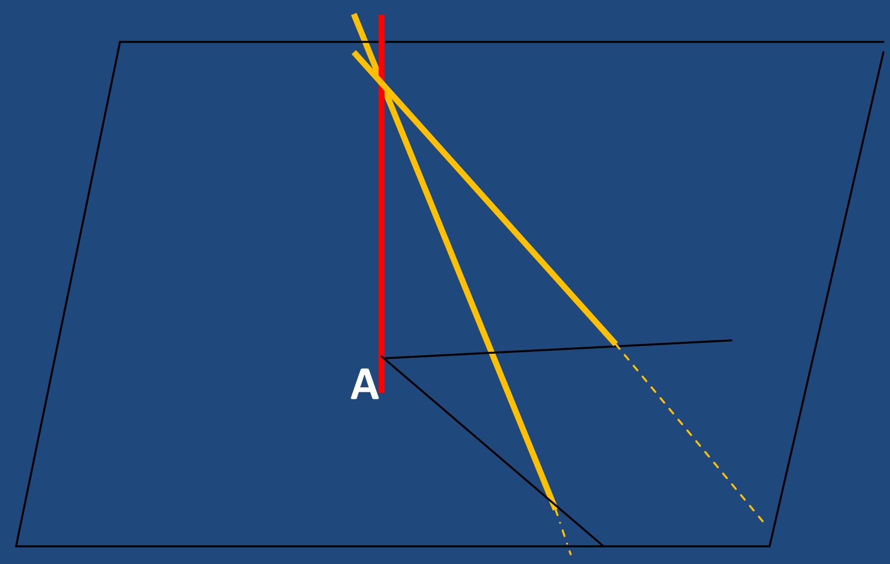


Prop.4

Se una retta è perpendicolare, nel punto comune A,
a due rette intersecantesi,
essa è
perpendicolare anche al piano di queste.



Le oblique ugualmente distanti dal piede della perpendicolare sono uguali



Sia

-- **AP una perpendicolare** a un ***piano***(con P intersezione retta piano) e

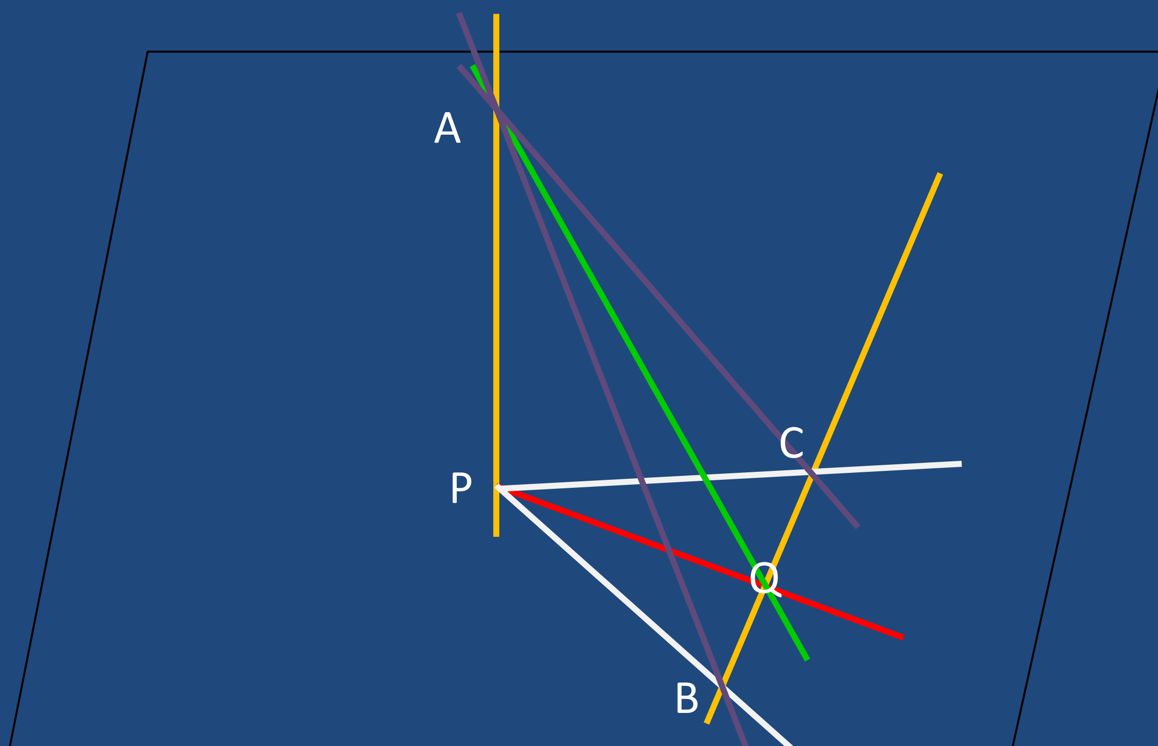
-- BC una sua retta qualsiasi di tale piano.

Se **PQ è la perpendicolare** alla ***retta BC***

allora

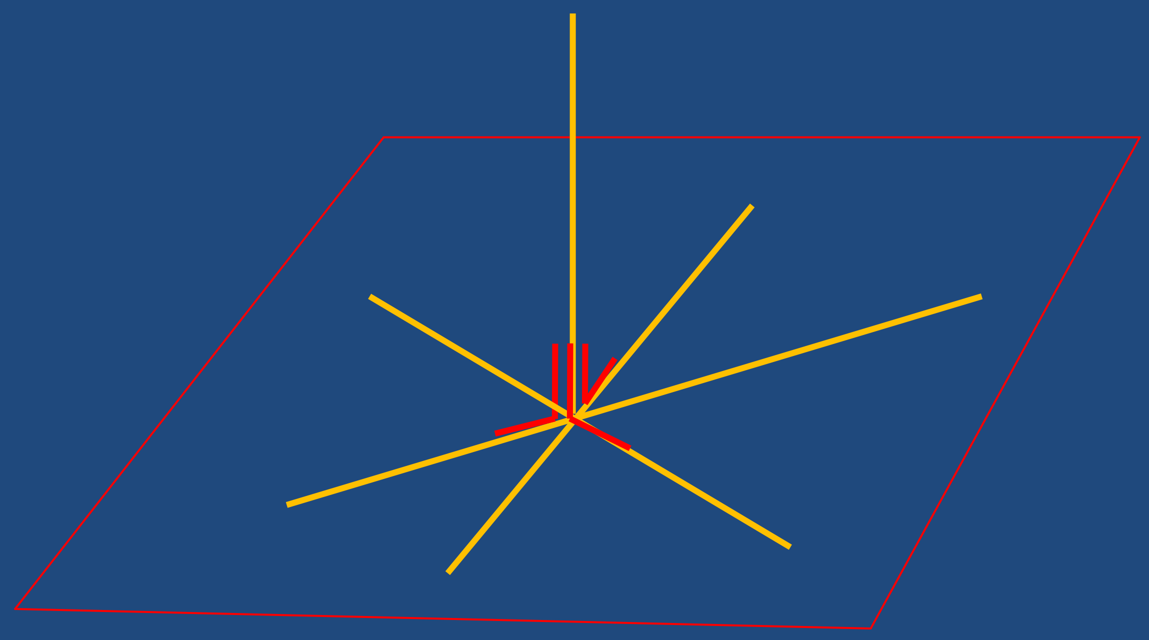
la retta **AQ è perpendicolare** alla ***retta BC*** (con A punto qualsiasi della perpendicolare).

E'questo il così detto teorema delle ***tre perpendicolari***



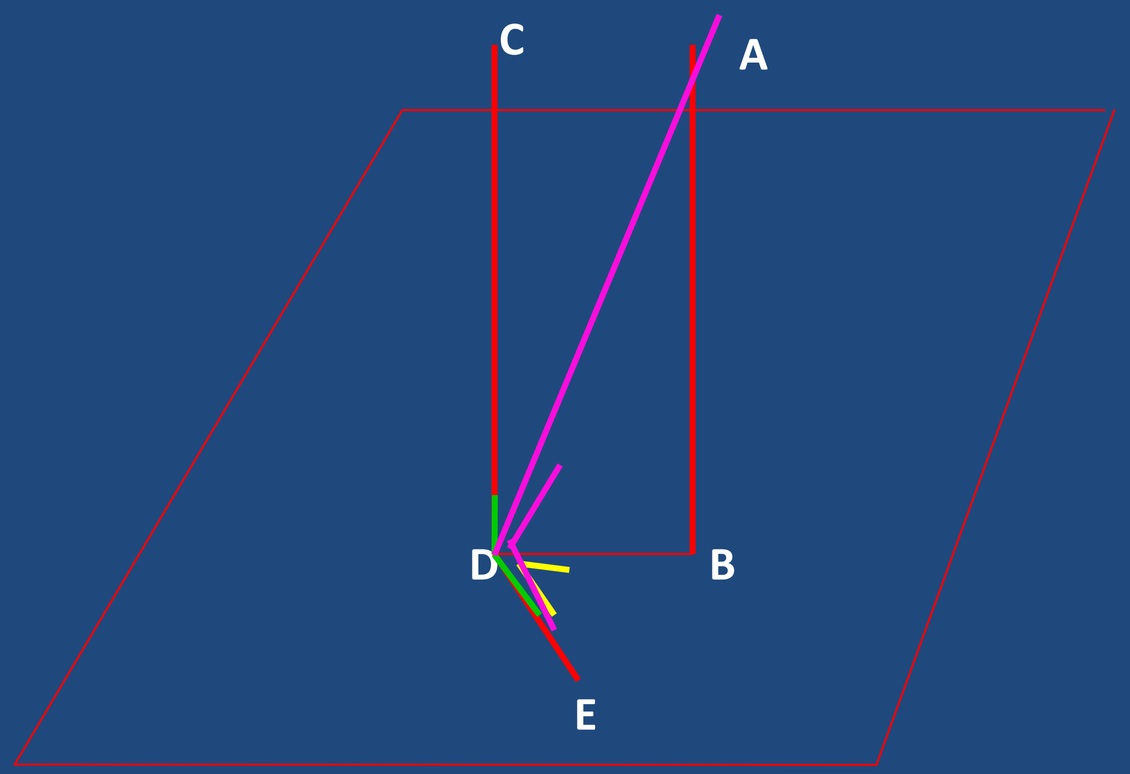
Prop.5

Se una retta è perpendicolare a tre rette in un punto ad esse comune, allora queste tre rette sono in un piano.



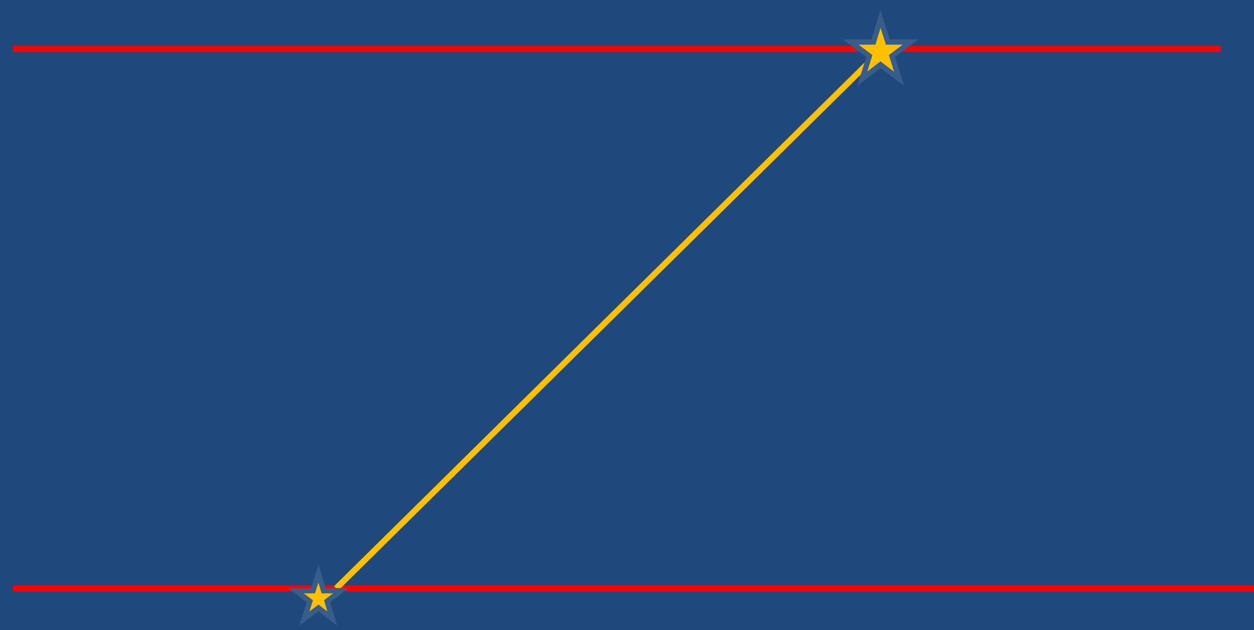
Prop.6

Se due rette sono perpendicolari a uno stesso piano
allora
sono parallele tra loro



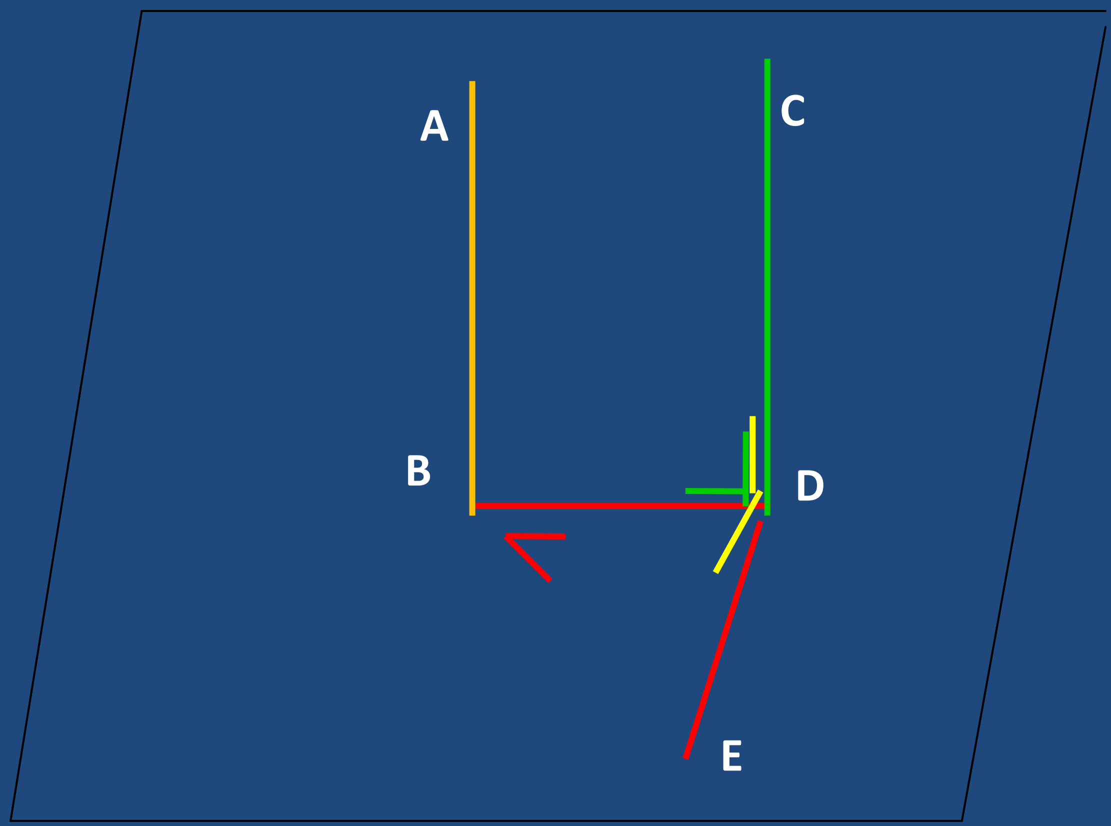
Prop.7

Se due rette sono parallele e su ciascuna di esse si prende un punto qualsiasi allora la retta congiungente questi due punti appartiene allo stesso piano delle parallele



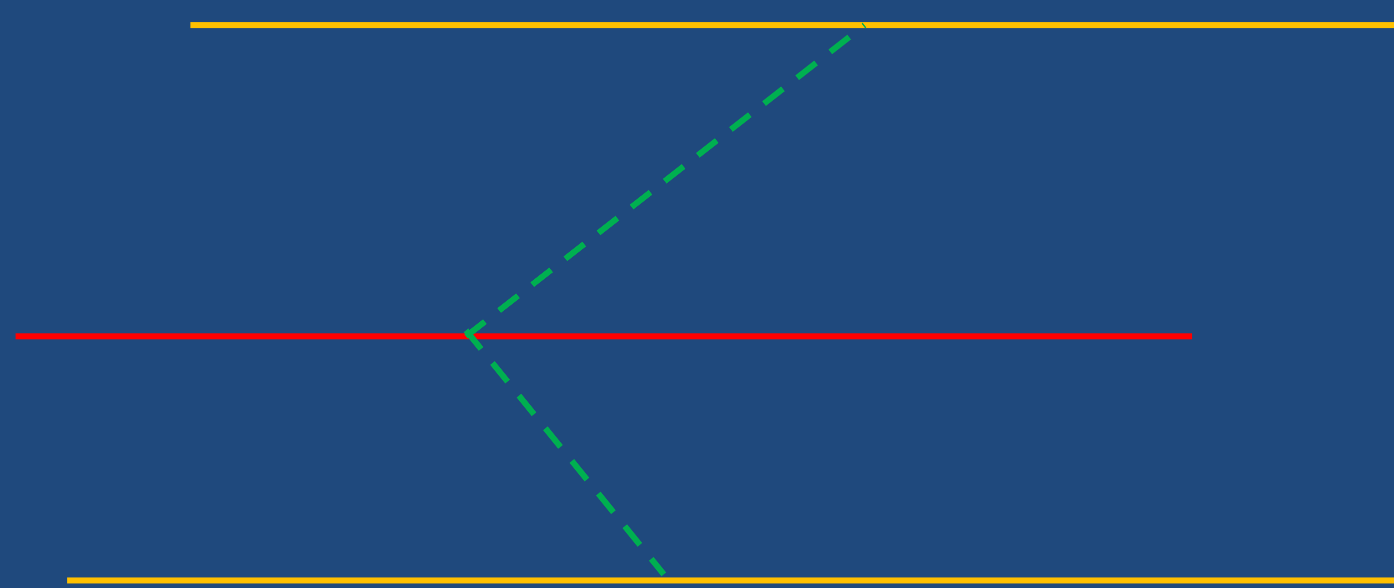
Prop.8

Se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare a un piano allora anche
l’altra è perpendicolare al piano



Prop.9

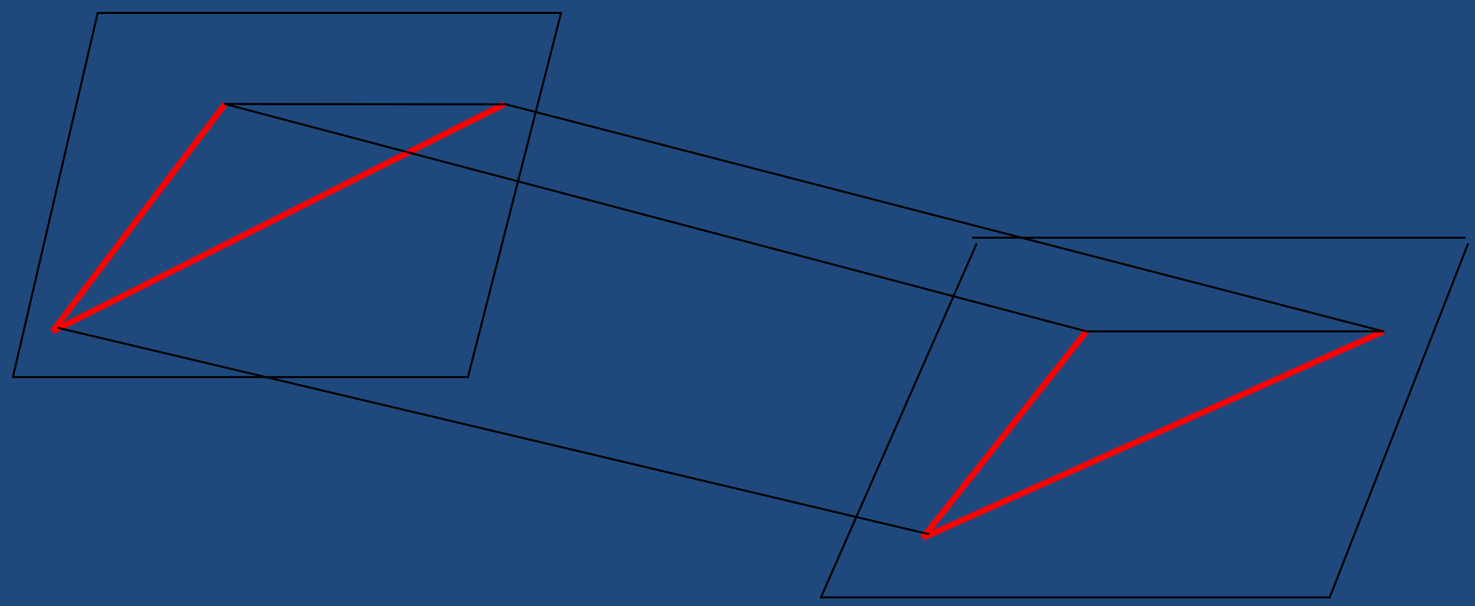
Le parallele a una stessa retta,
anche se non sono in uno stesso piano con questa,
sono
parallele tra loro



Prop. 10

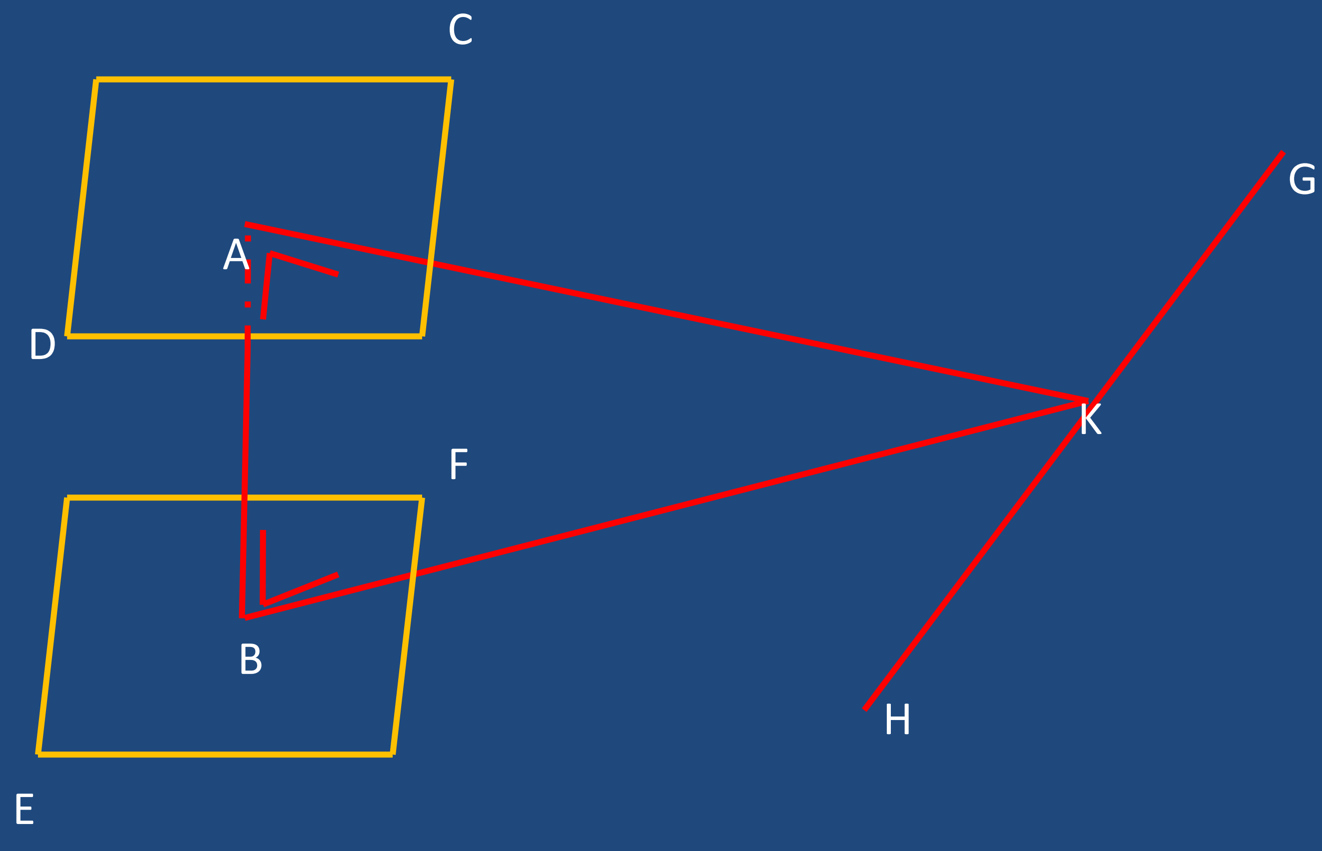
Due rette per un punto
-- parallele a due rette che si intersecano e
-- non giacciono con queste nello stesso piano,
formano angoli uguali.

Proposizione equivalente:
sezioni ugualmente inclinate di un diedro sono uguali.



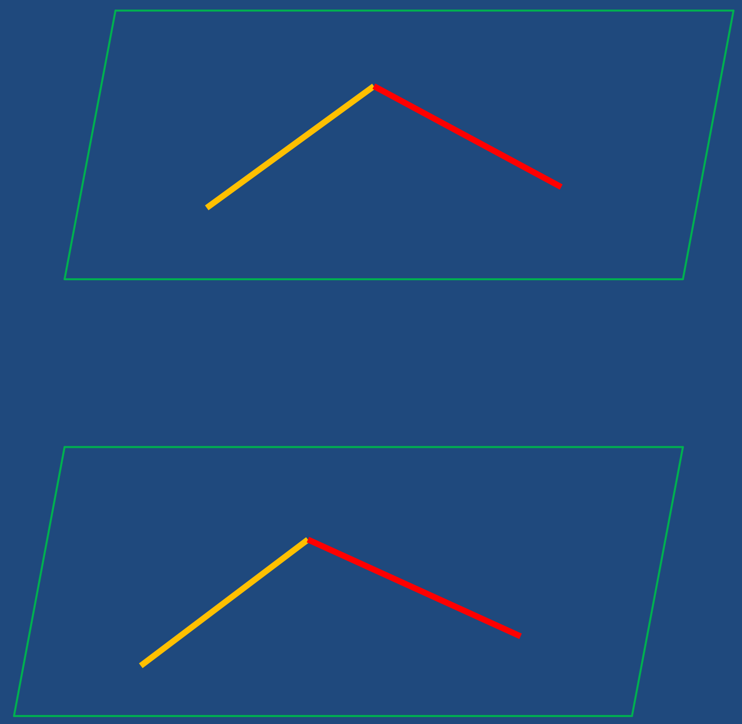
Prop.14

Piani a cui una stessa retta è perpendicolare sono paralleli



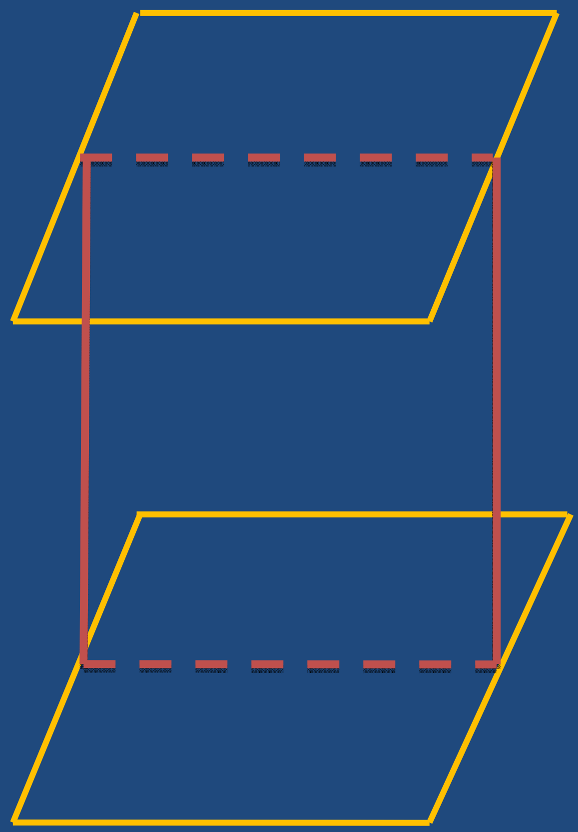
Prop.15

Se **rette intersecantisi sono parallele a due rette intersecantisi** e non nello stesso piano
con queste, i piani **di esse sono parallele**.



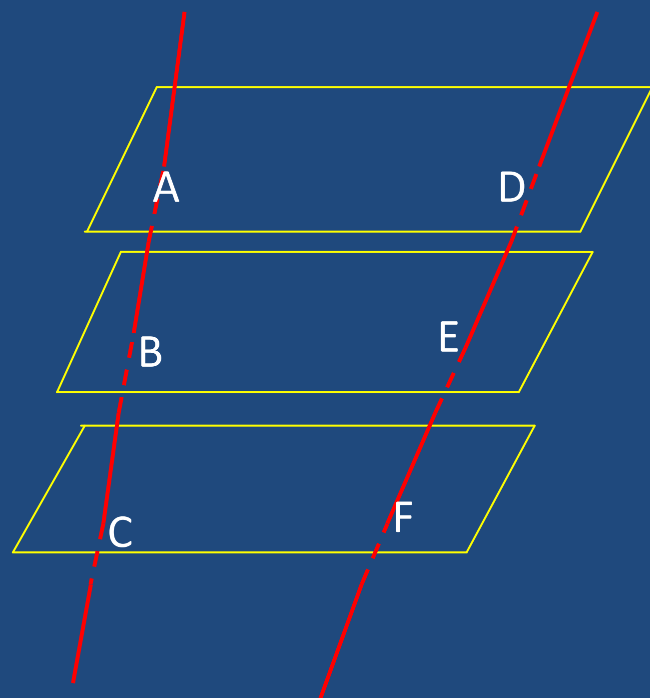
Pro. 16

Se due piani paralleli si segano con un piano qualunque le loro comuni intersezioni sono parallele.



Prop.17

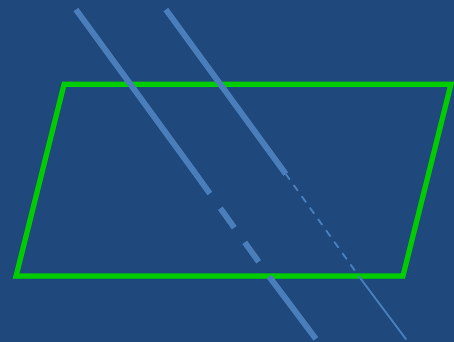
Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto (è questa una estensione del teorema di Talete).



AB : DE = BC : EF

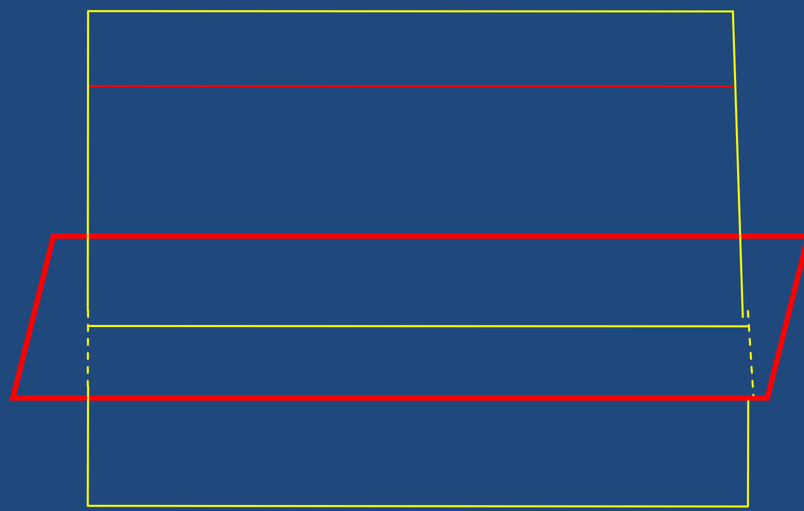
Conseguenze delle proposizioni 14, 15, 16, 17 sono le proprietà

- Se un piano interseca una retta, interseca pure ogni retta parallela alla retta data.



- Se per un punto esterno ad un piano si conduce una parallela a una retta del piano,la retta tracciata è parallela al piano.

•Ogni piano passante per una retta parallela ad un piano e segante tale piano, lo sega secondo una retta parallela alla retta data.



•Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela a uno è parallela anche all'altro o sta su esso.

•Tutte le rette per un punto parallele a un piano che non passa per quel punto stanno in un piano parallelo al dato.

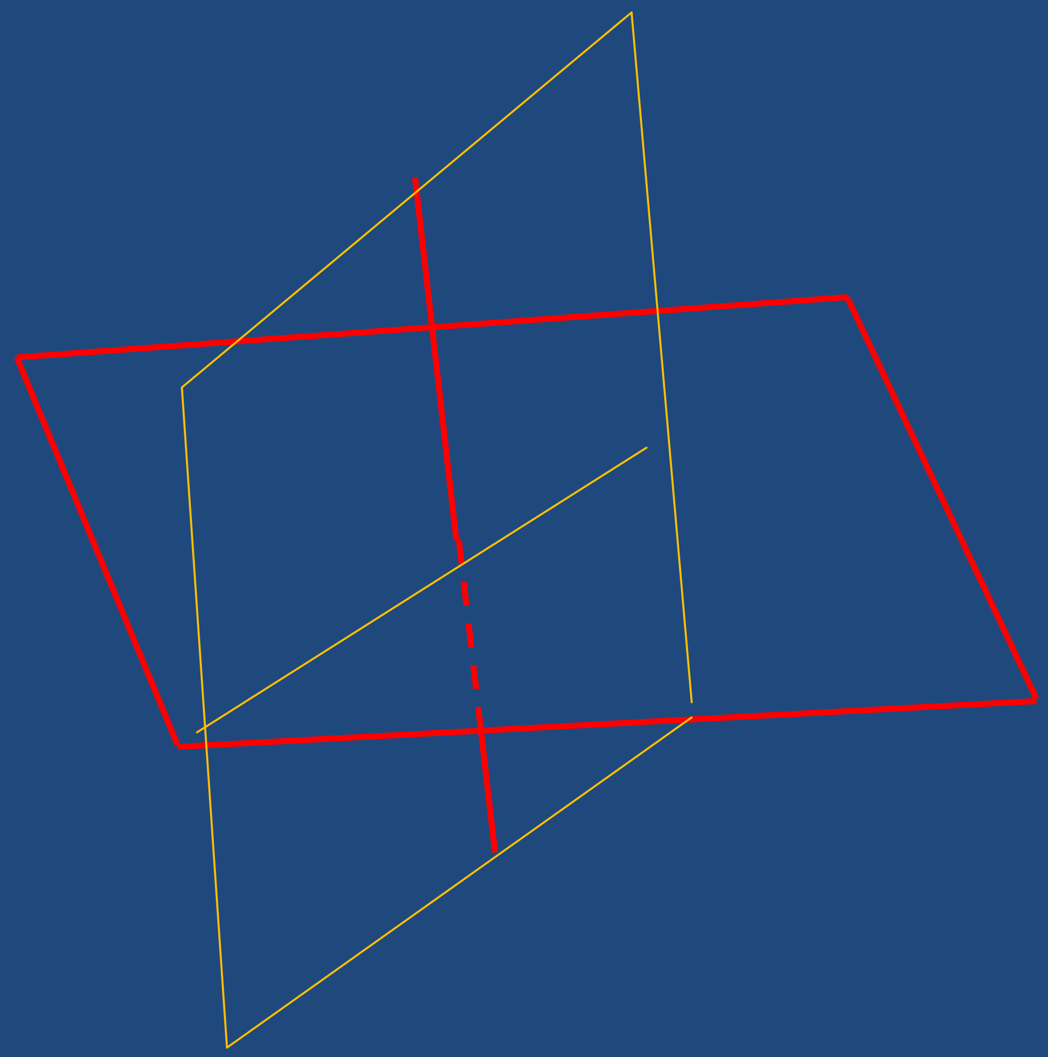
Per un punto che non sta sopra un piano passa un sol piano parallelo al dato

•Due piani paralleli a un terzo sono paralleli tra di loro.

•Se due piani sono paralleli ogni piano che interseca uno interseca anche l'altro

Prop.18

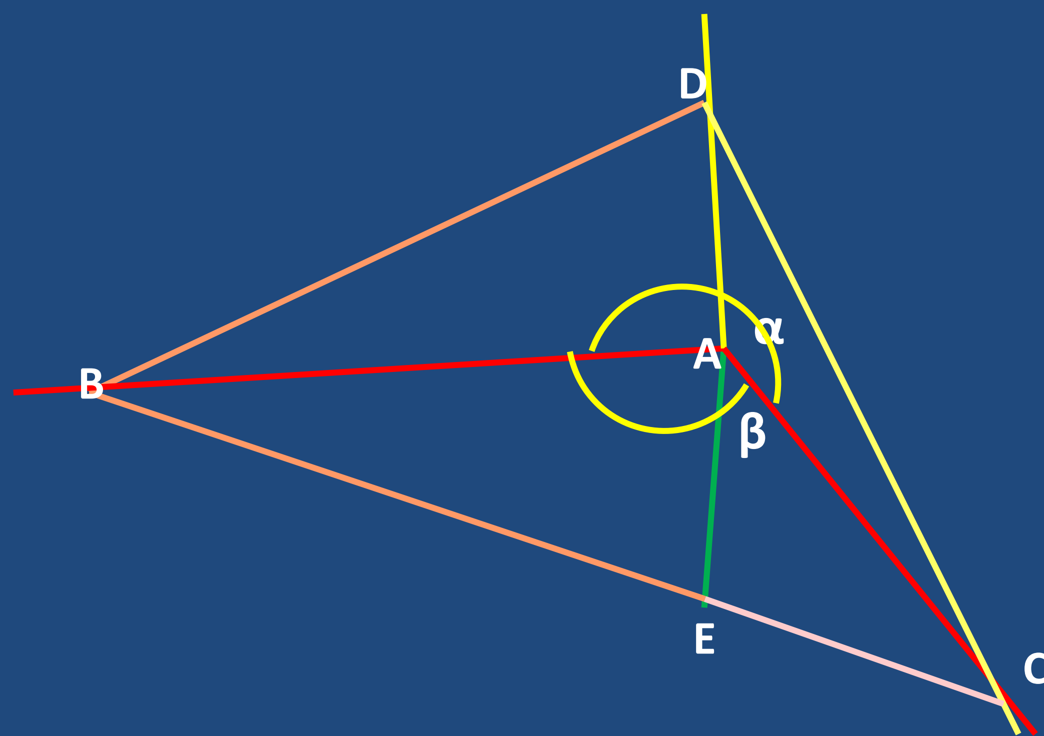
Se una retta è perpendicolare ad un piano,
anche tutti i piani per essa sono perpendicolari allo stesso piano.



Prop.20

Se un angolo solido è formato da tre angoli piani,

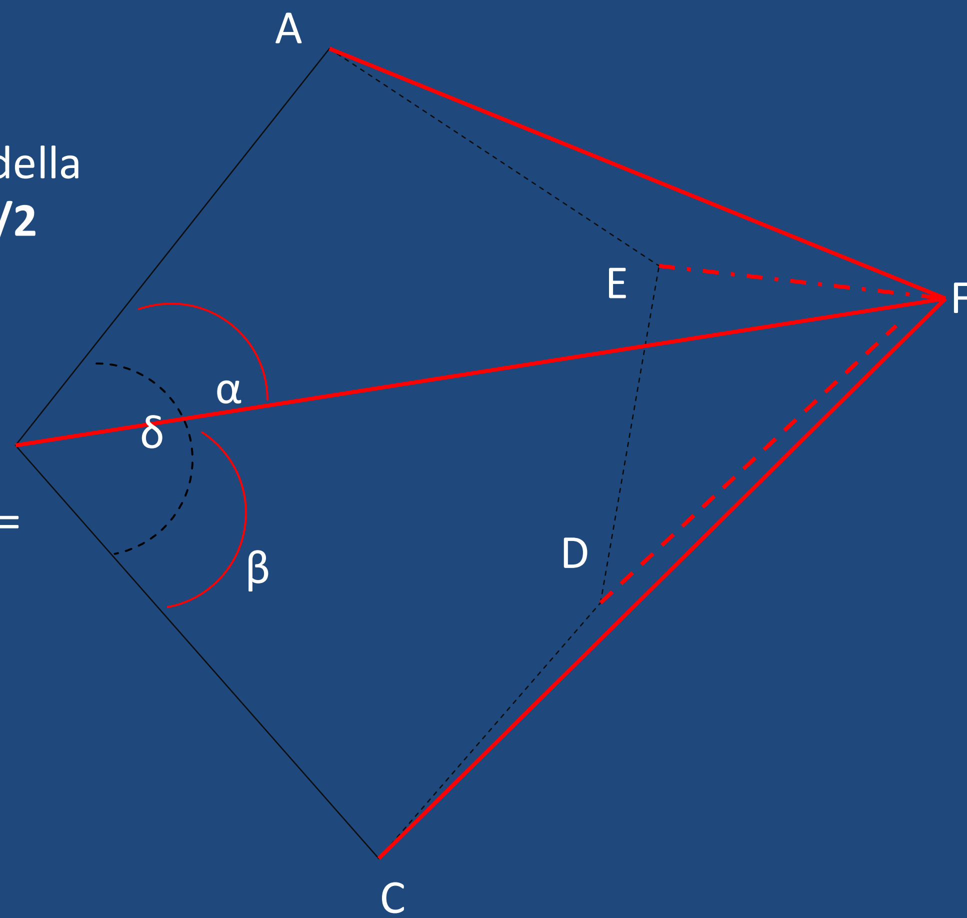
due di questi comunque presi superano il rimanente.



Prop.20

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani la cui somma è minore di quattro angoli retti

Angoli degli n triangoli della piramide valgono **2n*π/2**



Angoli della sezione B valgono (2n*π/2- 4π/2)= =(2n-4)*π/2

$\delta < \alpha + \beta$

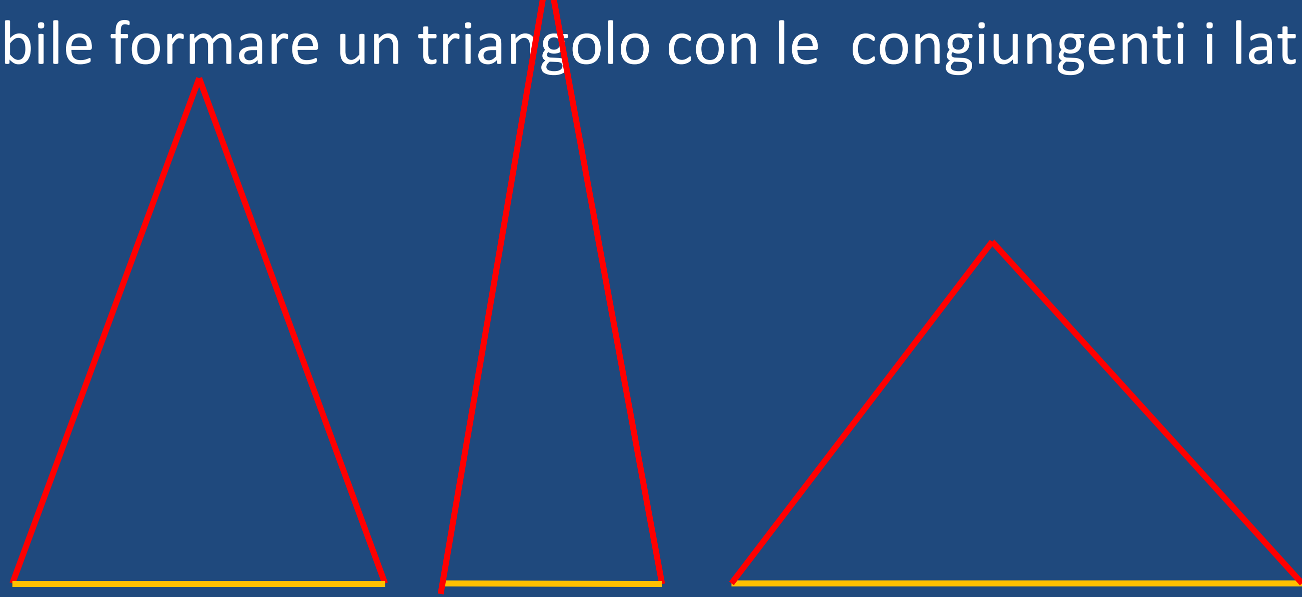
Prop. 22

Se si hanno tre angoli piani, **due dei quali** , comunque presi insieme,

-- sono **maggiori del rimanente** e

--sono **racchiusi da lati uguali**,

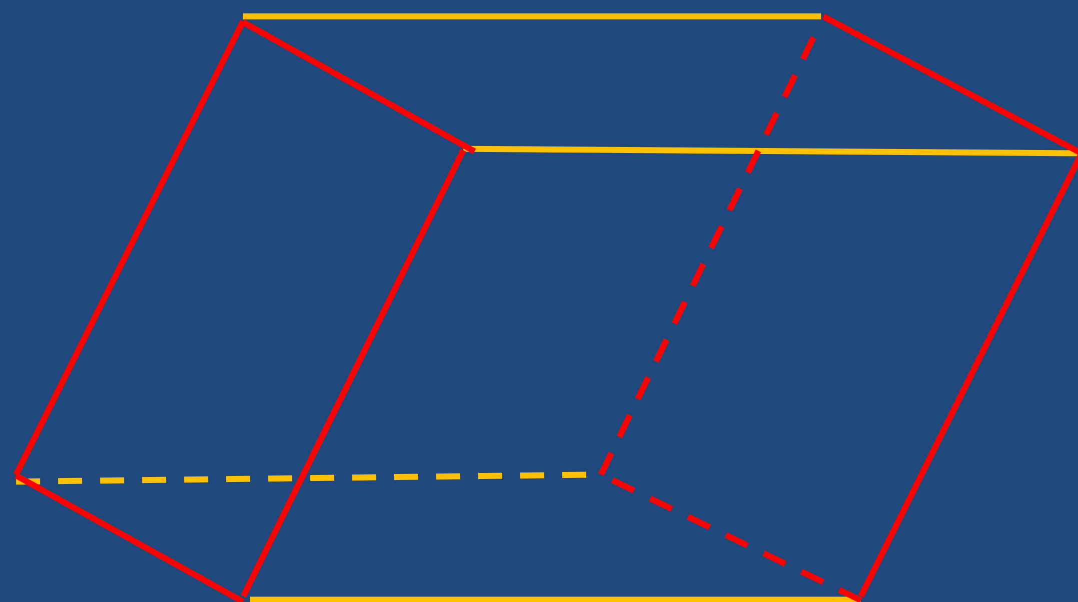
è possibile formare un triangolo con le congiungenti i lati uguali.



Con tre angoli piani, due dei quali comunque presi sono maggiori del rimanente, costruire un angolo solido;
occorre che la somma dei tre angoli sia minore di 4 retti.

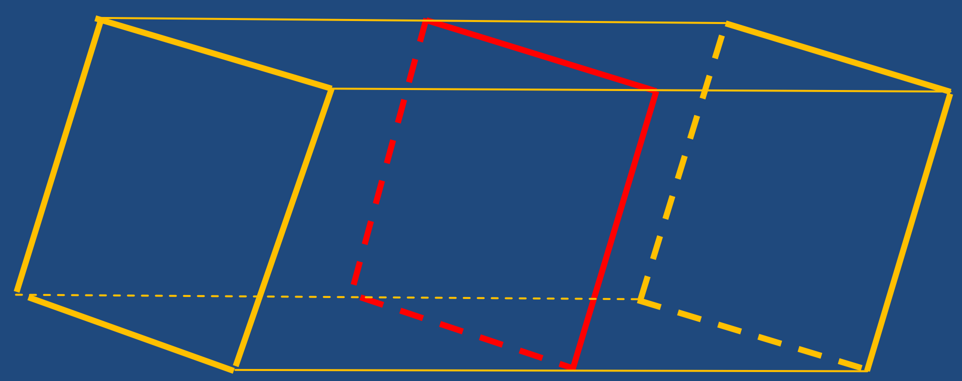
Prop.24

Se un solido è racchiuso da piani paralleli,
i piani di esso opposti tra loro sono uguali e parallelogrammi



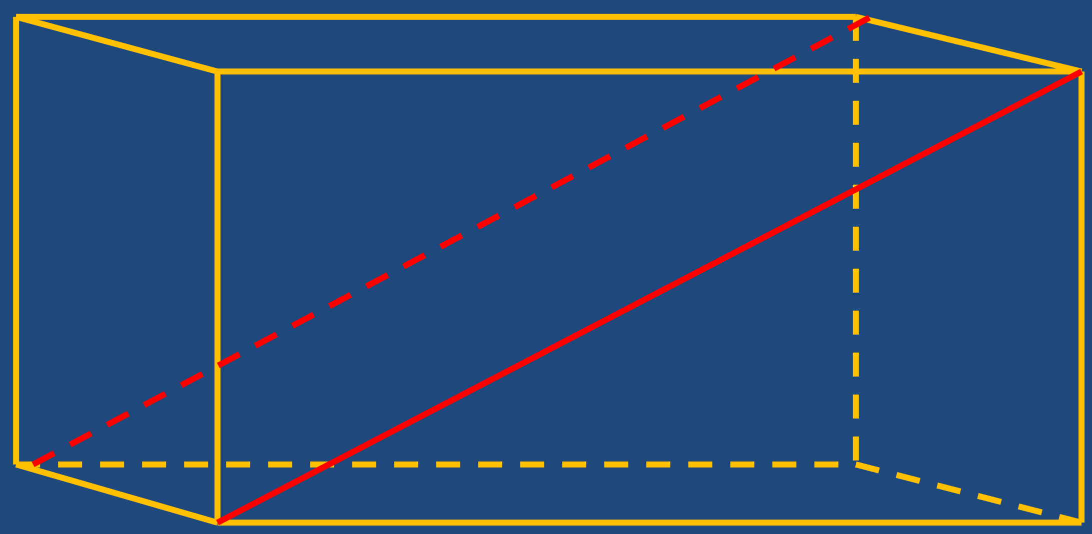
Prop.25

Se un solido parallelepipedo è diviso da un piano parallelo a due piani opposti, la base sta alla base come il solido al solido.



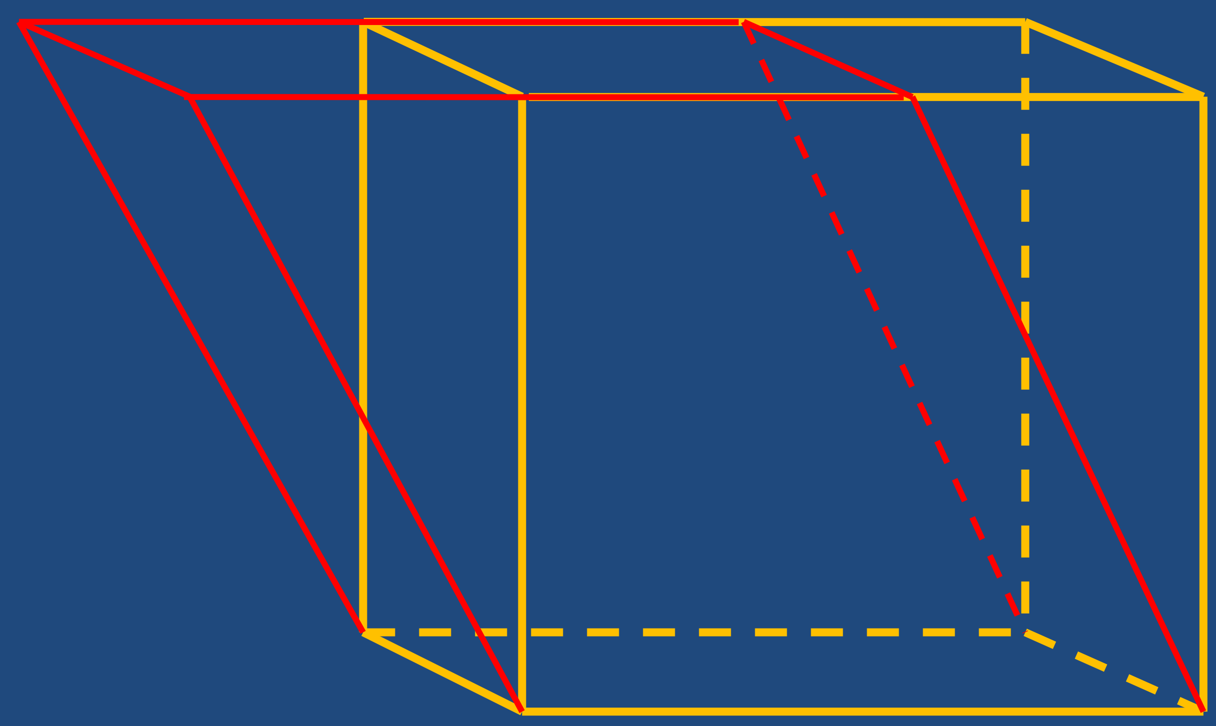
Prop.28

Se si divide un solido parallelepipedo dato con un piano passante per le diagonali dei lati opposti, il solido è diviso dal piano in parti uguali.



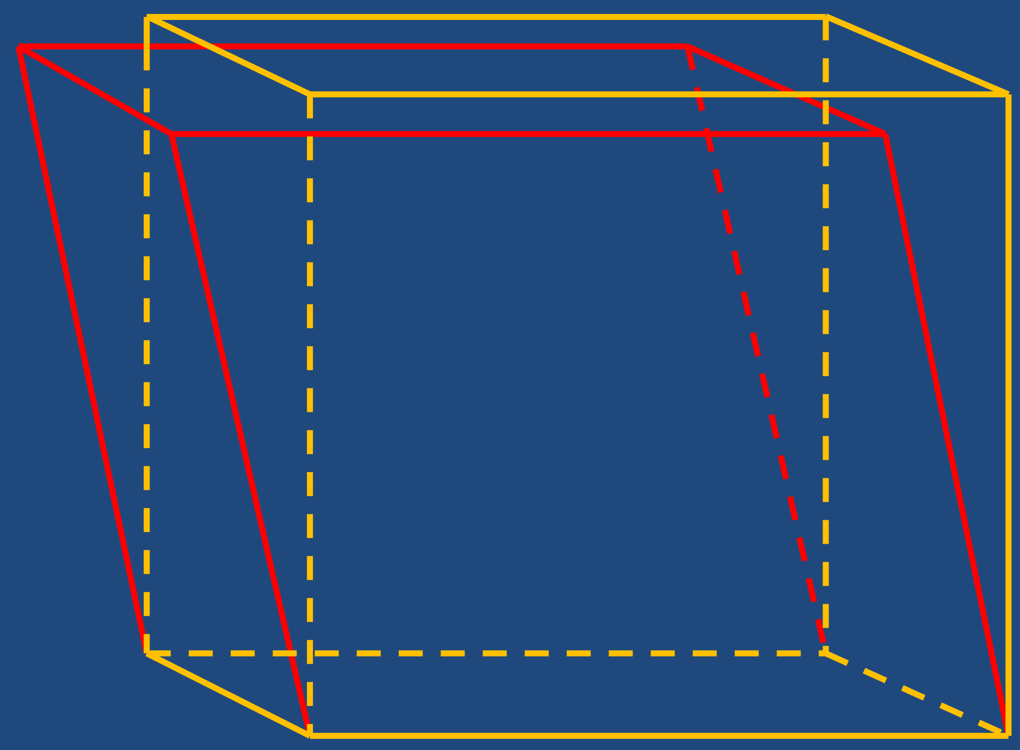
Prop. 29

Solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate terminano sulle stesse rette, sono uguali tra loro.



Prop.30

Solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate <u>non</u> terminano sulle stesse rette, sono uguali tra loro.



Prop. 32- 33-34

- Solidi parallelepipedi aventi la stessa altezza sono tra loro come le basi.

$$P_1 : P_2 = S_1 : S_2 .$$

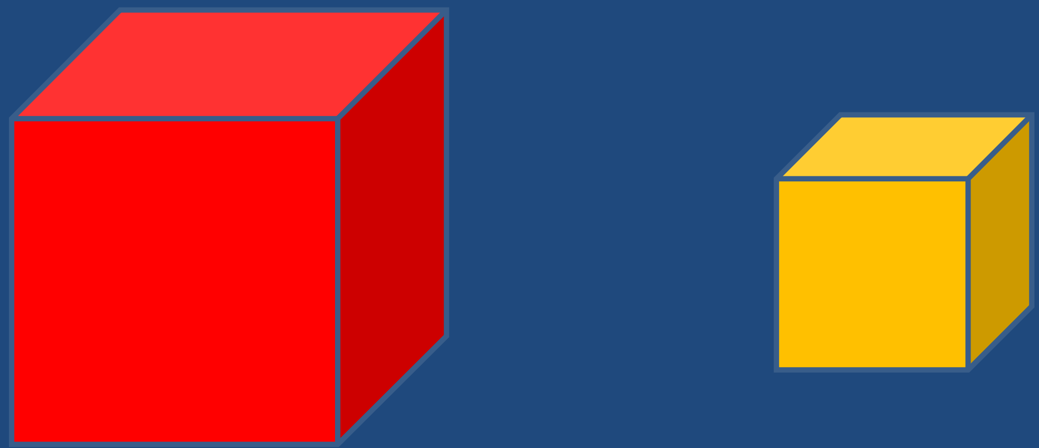
- Solidi parallelepipedi simili sono in ragione triplicata dei lati omologhi.

$$P_1 / P_2 = k^3$$

- Le basi di solidi parallelepipedi uguali sono in ragione inversa delle altezze;

$$S_1 : S_2 = h_2 : h_1$$

- Se le basi di solidi parallelepipedi sono in ragione inversa delle altezze,questi sono uguali



Prop. 35

Abbiansi **due angoli piani uguali**,

- **dai loro vertici si conducano due rette elevate sul piano che formino, coi lati degli angoli dati, angoli uguali ciascuno a ciascuno;**

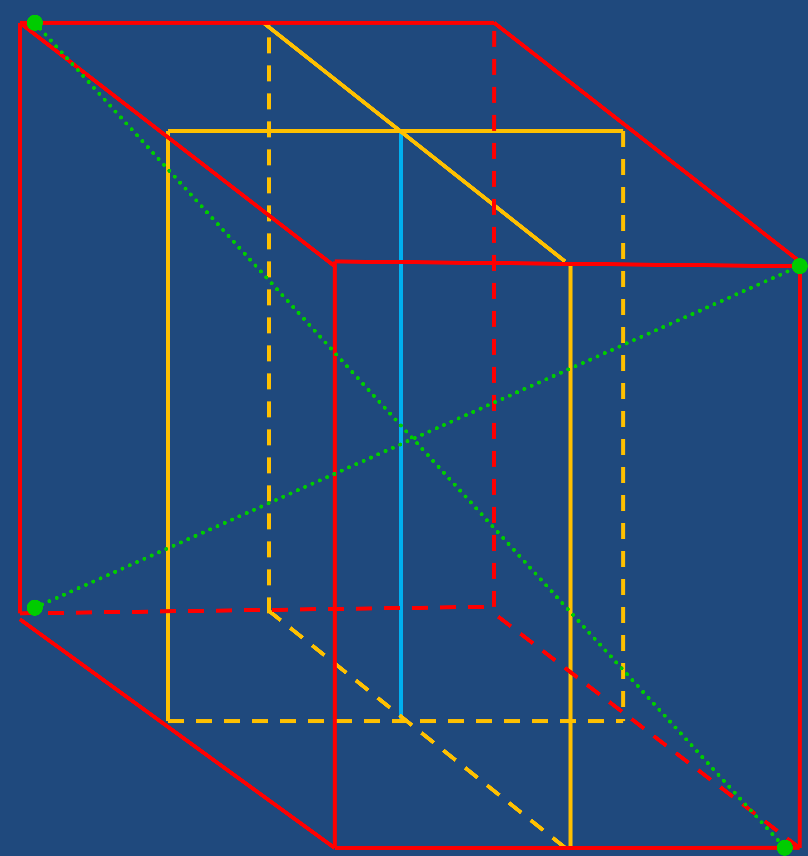
- **sulle rette elevate si prenda un punto qualunque da cui si tiri la perpendicolare ai piani degli angoli;**

- **si conducano poi le congiungenti i punti, così ottenuti sui piani, coi vertici degli angoli dati:**

➡ **tali rette formano colle rette elevate angoli uguali.**

Prop. 38

Se in un cubo
-- si dividono per metà i lati di piani opposti e
-- si conducono i piani pei punti di divisione,
la comune intersezione di questi piani e le diagonali del cubo si dividono tra loro per metà.

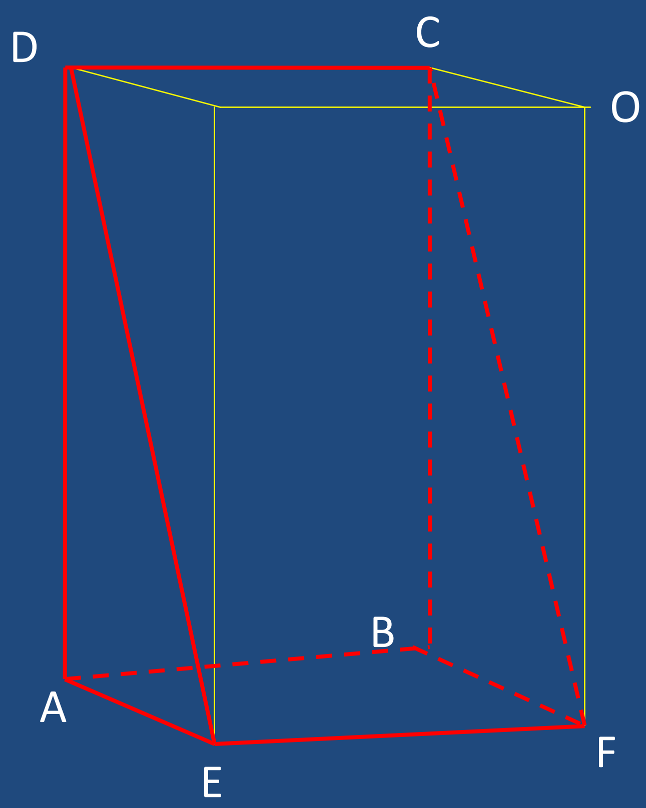


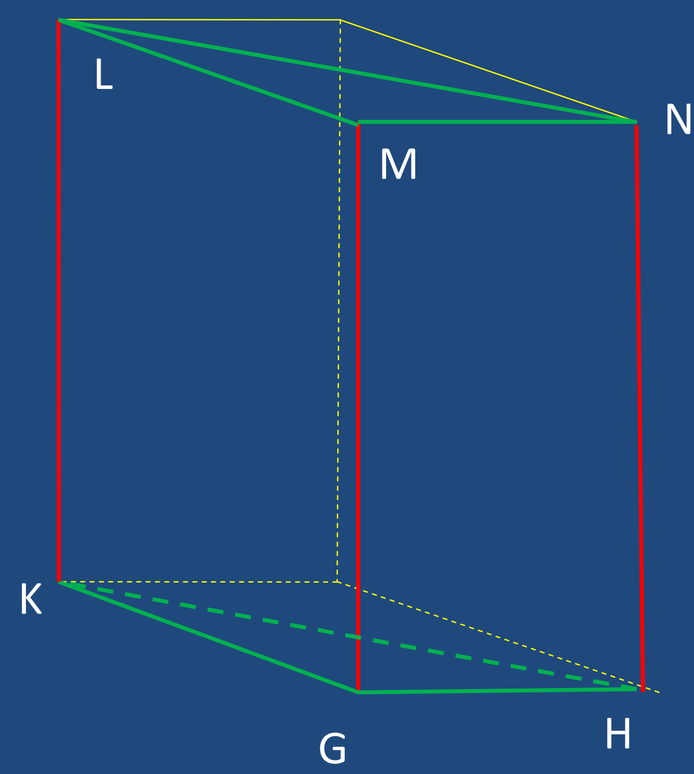
Prop.39

Se di due prismi di uguale altezza

uno ha per base un parallelogrammo, l'altro un triangolo, e

se il parallelogrammo è doppio del triangolo, i prismi sono uguali.





Libro XII

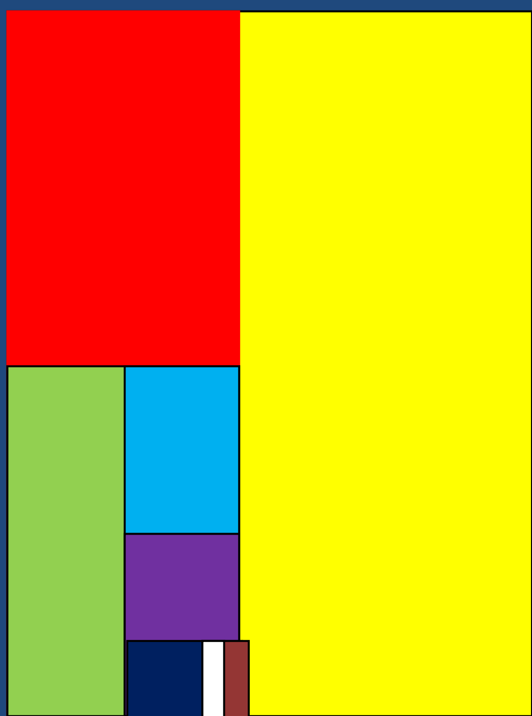
Principi su cui si fonda il Metodo di Esaustione

la definizione del libro (V,4, term.) :
‘ ***si dice che hanno tra loro un rapporto quelle grandezze che sono tali che una qualunque di esse moltiplicata può superare una qualunque delle altre’***.

La proposizione del libro (X; 1):
‘ date due grandezze disuguali, se dalla maggiore si sottrae una grandezza più grande della sua metà, e se da questa si sottrae una grandezza più grande della sua metà, e se questa operazione si ripete continuamente resterà una grandezza che sarà più piccola della grandezza minore assegnata

il metodo di esaustione si articola in tre momenti:

1. **una premessa**



Date **a** e **b** , con **a** > **b** , due grandezze tra loro omogenee siano:

$$c_1 = a - d_1 \qquad \text{con } d_1 \geq \tfrac{1}{2} a .$$
$$c_2 = c_1 - d_2 \qquad \text{con } d_2 \geq \tfrac{1}{2} c_1$$
$$c_3 = c_2 - d_3 \qquad \text{con } d_3 \geq \tfrac{1}{2} c_2$$
$$c_4 = c_3 - d_4 \qquad \text{con } d_4 \geq \tfrac{1}{2} c_3 .$$
$$c_5 = c_4 - d_5 \qquad \text{con } d_5 \geq \tfrac{1}{2} c_4$$
$$c_6 = c_5 - d_6 \qquad \text{con } d_6 \geq \tfrac{1}{2} c_5$$
$$c_7 = c_6 - d_7 \qquad \text{con } d_7 \geq \tfrac{1}{2} c_6$$

... =............ ....

$$c_n = c_{n-1} - d_n \qquad \text{con } d_n \geq \tfrac{1}{2} c_{n-1}$$

La successione

$$c_1 , c_2 , c_3 , \dots , c_n$$

sarà tale per cui si arriverà a un

$c_n < b$ (X, 1)

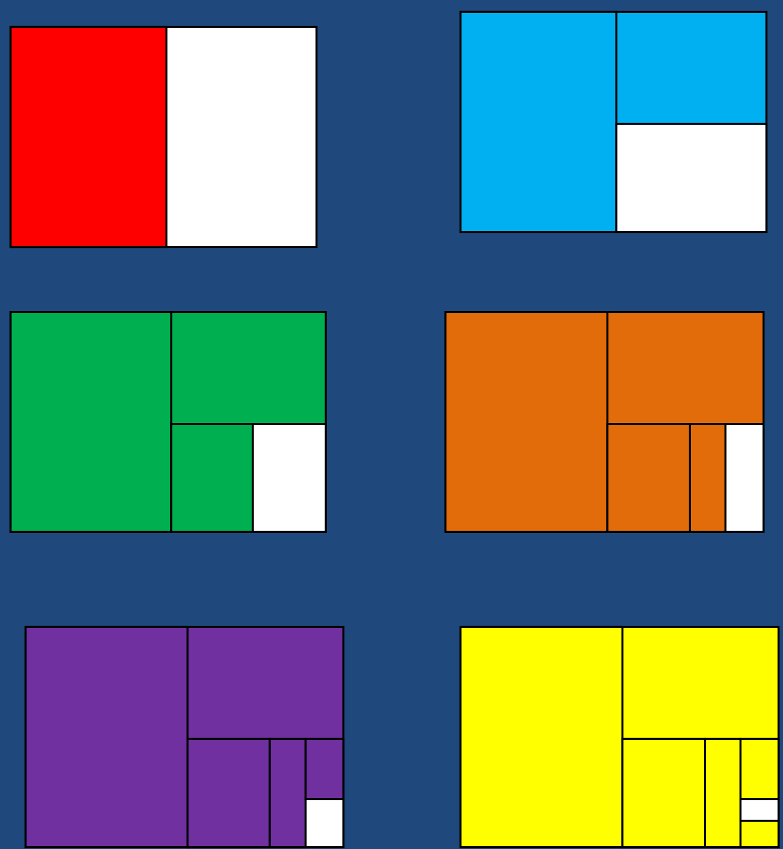
con linguaggio moderno……..

2. **Costruzione della successione**

$e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ \ldots\,,\ e_n$

con

$$\tfrac{1}{2}\,a < e_1 < a$$
$$e_1 + \tfrac{1}{2}(a - e_1) < e_2 < a$$
$$e_2 + \tfrac{1}{2}(a - e_2) < e_3 < a$$
$$e_3 + \tfrac{1}{2}(a - e_3) < e_4 < a$$
$$e_4 + \tfrac{1}{2}(a - e_4) < e_5 < a$$
$$e_5 + \tfrac{1}{2}(a - e_5) < e_6 < a$$
$$\ldots + \ldots\ldots\ldots < \ldots < \ldots$$
$$e_{n-1} + \tfrac{1}{2}(a - e_{n-1}) < e_n < a$$



La successione

$\mathbf{e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ \ldots\,,\ e_n}$

si potrà portare a un termine $\mathbf{e_n}$ tale che

$$\mathbf{a - e_n < \varepsilon}$$

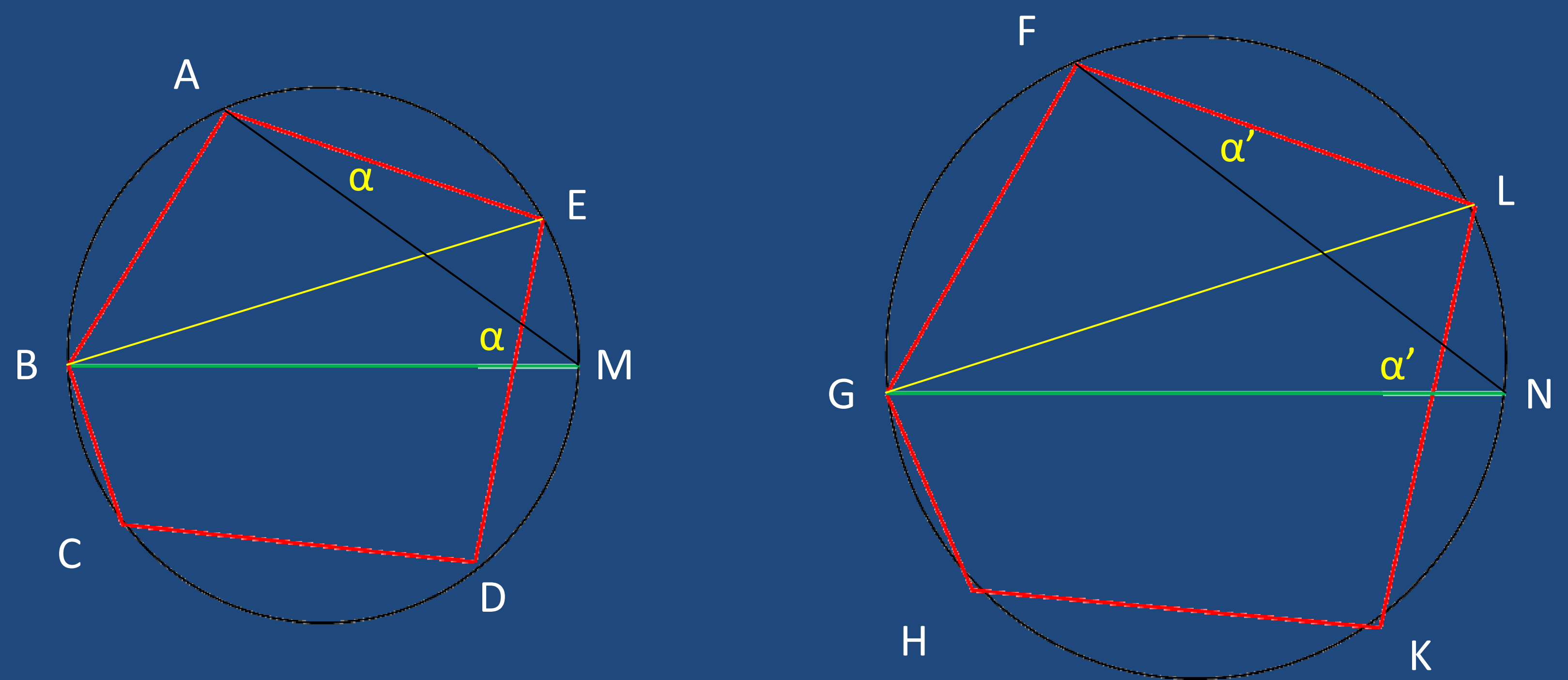
con linguaggio moderno ……..

•3. Argomentazione per assurdo

si suppone che il valore della grandezza sia diverso dal valore **a** trovato euristicamente, e ponendolo alternativamente maggiore – minore si perviene, lavorando sui valori della serie costruita nel punto 2 a un assurdo.

Prop.1

Poligoni simili inscritti in cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri

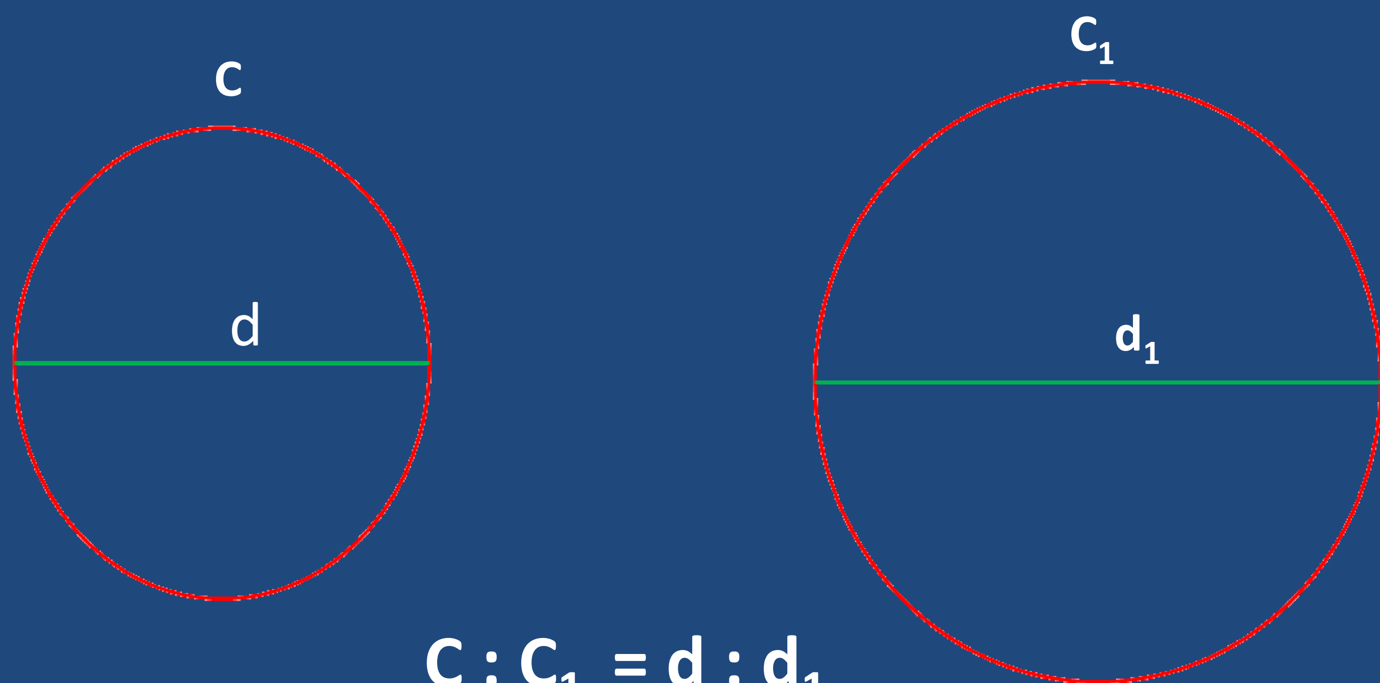


$d^2 : d'^2 = (BA : GF)^2$ **$P : P' = (BA : GF)^2$**

$$P : P' = d^2 : d'^2$$

Prop.2

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri



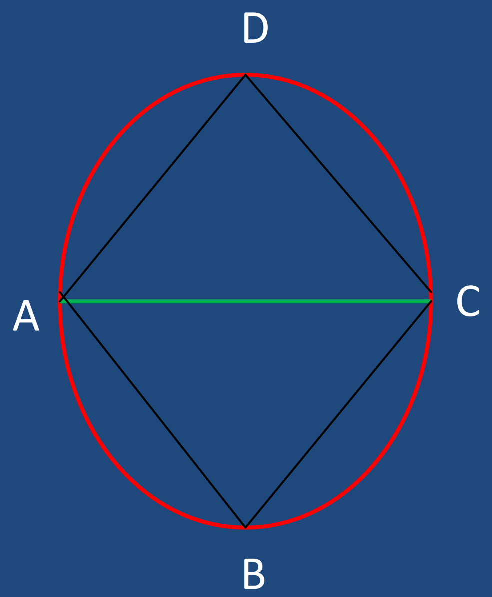
$$C : C_1 = d : d_1$$

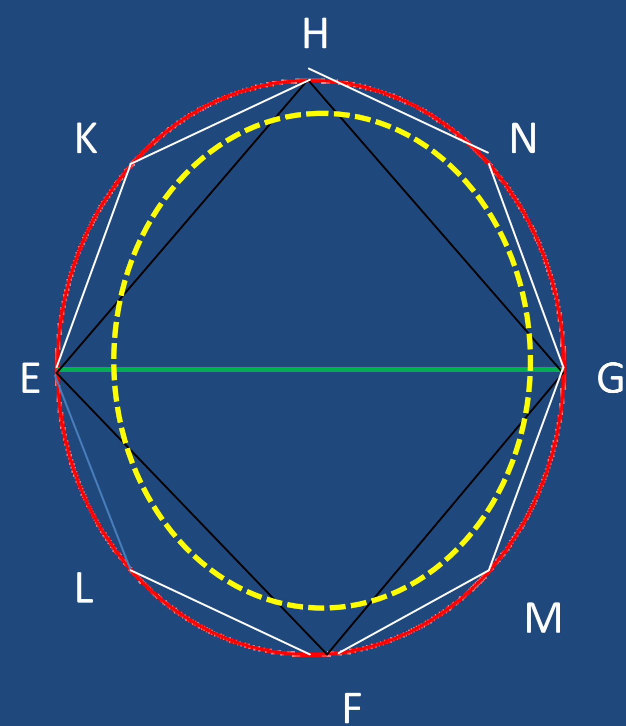
$$\pi r^2 : \pi r_1^{\,2} = (2r)^2 : (2r_1)^2$$

Negazione della tesi.

Non $d : d_1 = C : C_1$ **,** **ma** $d : d_1 = C : S$ **con** $S < C_1$

quadrato EFGH inscritto è
maggiore della metà del cerchio EFGH

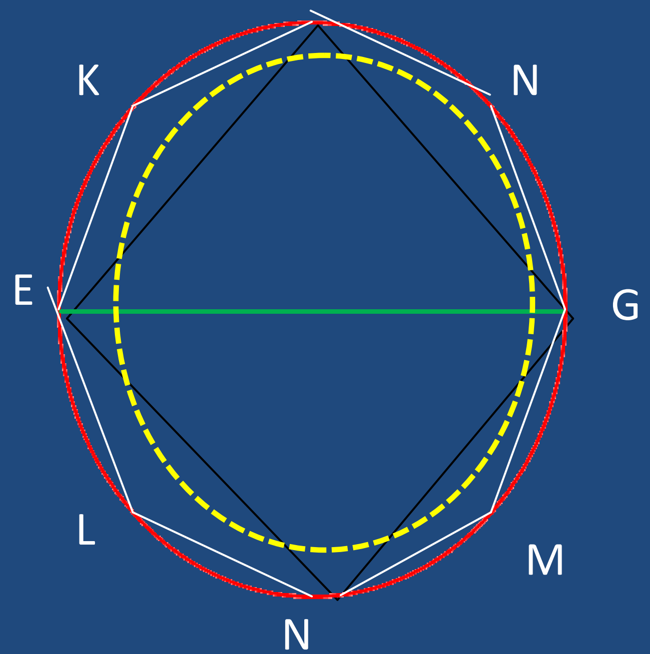


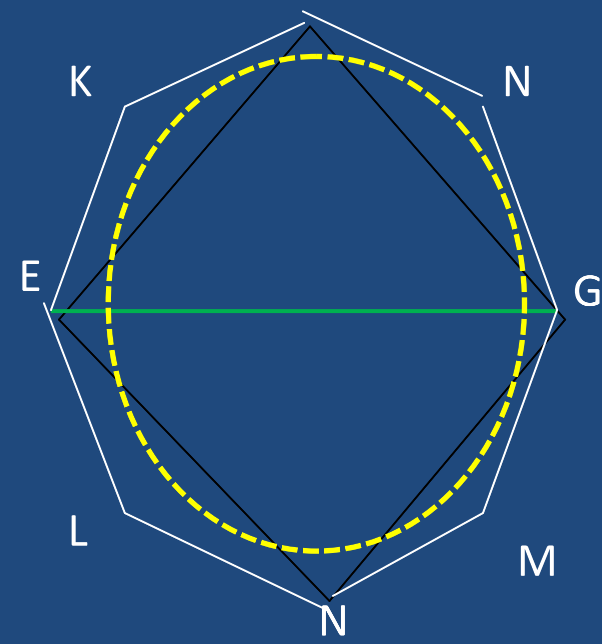


Triangolo EKH è maggiore della metà del rispettivo segmento di cerchio

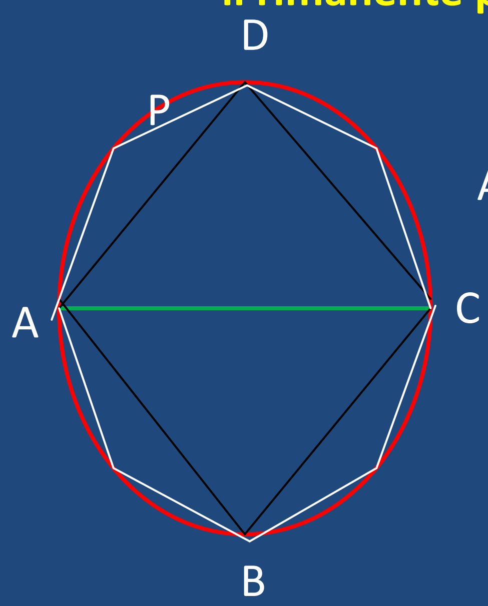
……………… continuando….

Si trovano certi segmenti del cerchio i quali sono minori dell'eccesso del cerchio EFGH sullo spazio S.





il rimanente poligono EKFLGMNH (P’) è maggiore dello spazio S.



$AC^2 : EG^2 = P : P'$

$AC^2 : EG^2 = C : S$

$P : P' = C : S$

$P : C = P' : S$

Quindi P’ è minore di S; contraddizione!

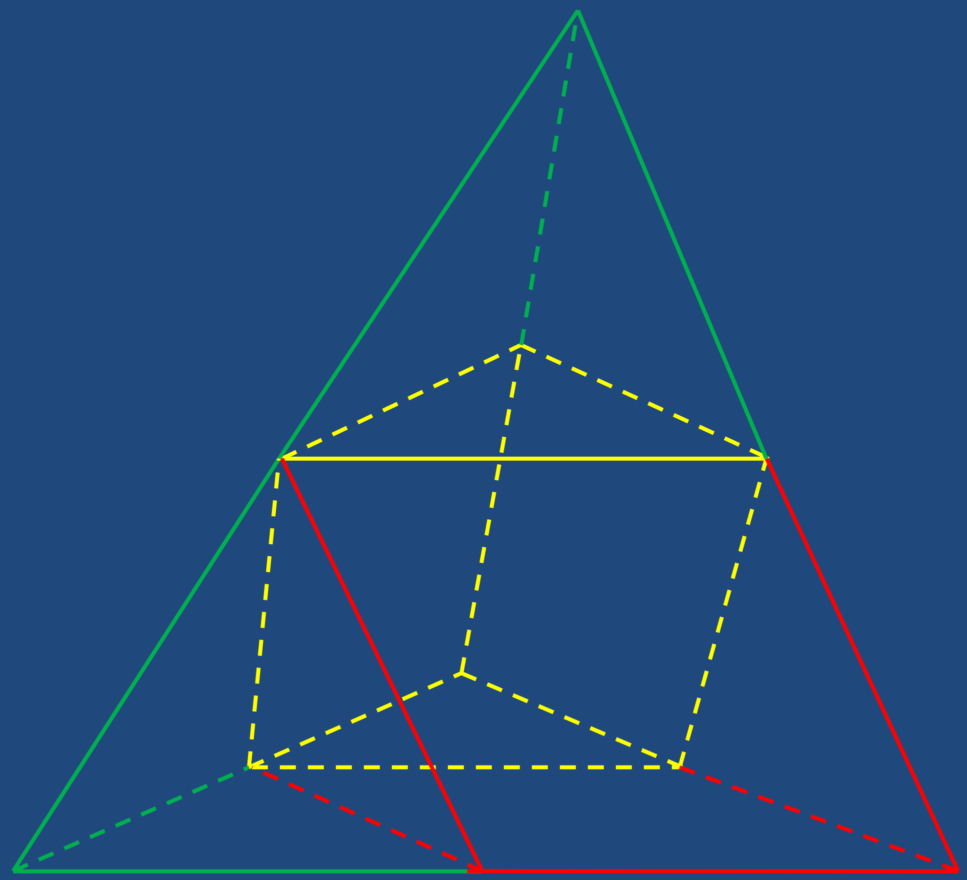
Prop.3

Ogni piramide di base triangolare si divide in

-- due piramidi di uguale base e simili all’intera e in

-- due prismi uguali.

I due prismi assieme sono maggiori della metà dell’intera piramide.



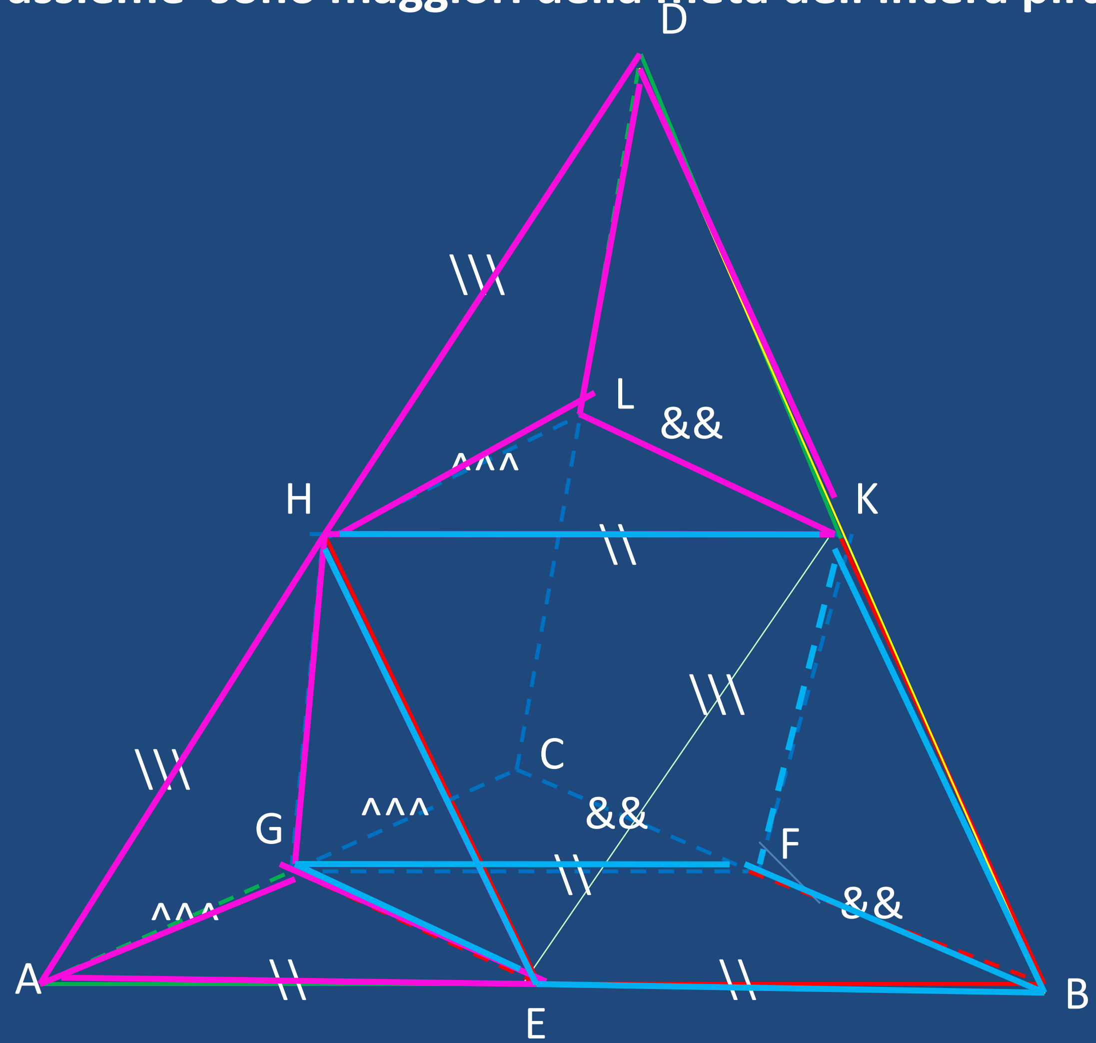
Prop.3

Ogni piramide di base triangolare si divide in

-- due piramidi di uguale base e simili all’intera e in

-- due prismi uguali.

I due prismi assieme sono maggiori della metà dell’intera piramide.

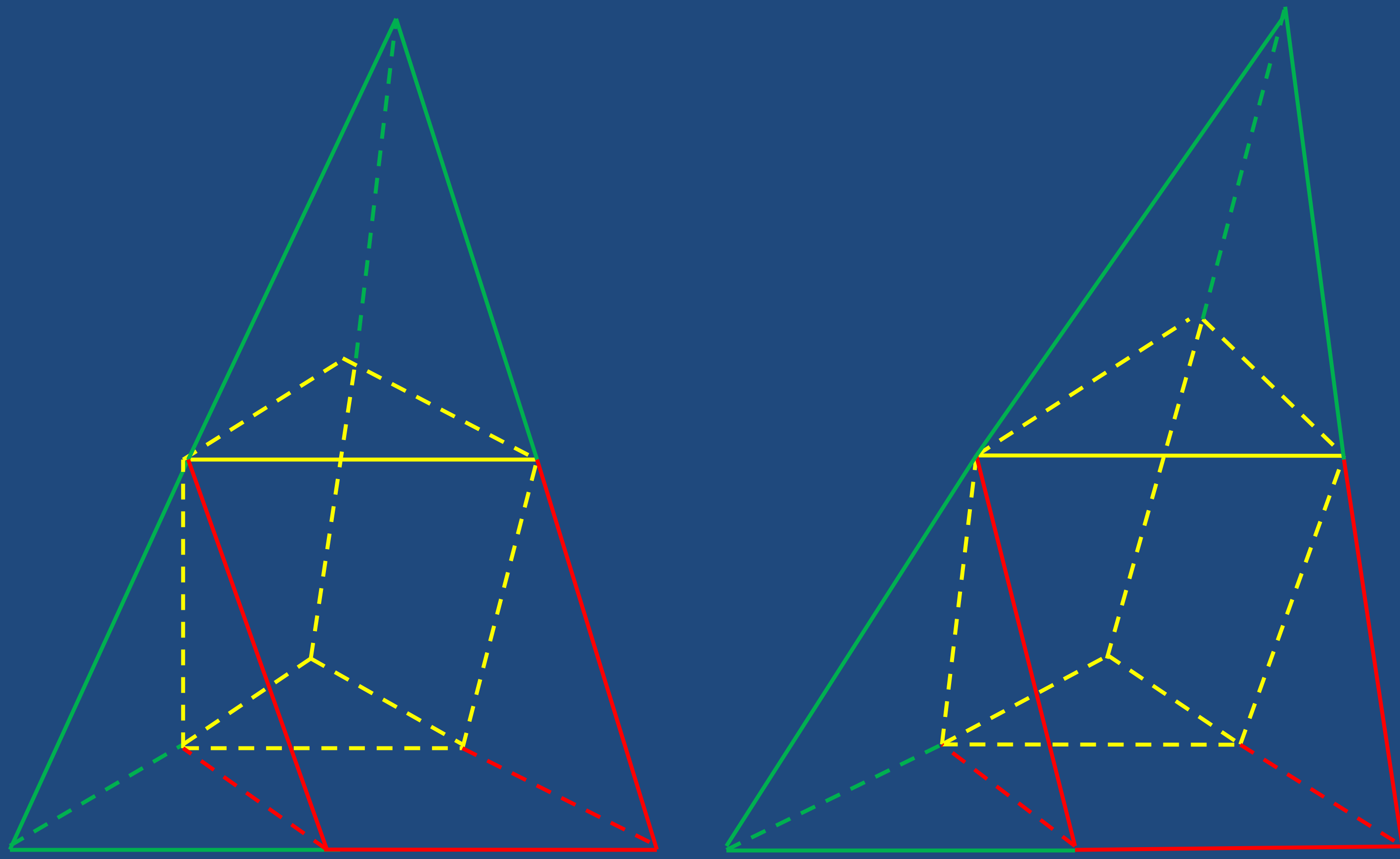


➢**Prop.4**

Date due piramidi triangolari aventi la stessa altezza,
se ciascuna di esse si divide in
-- due piramidi uguali tra loro e simili all’intera e in
-- due prismi uguali,

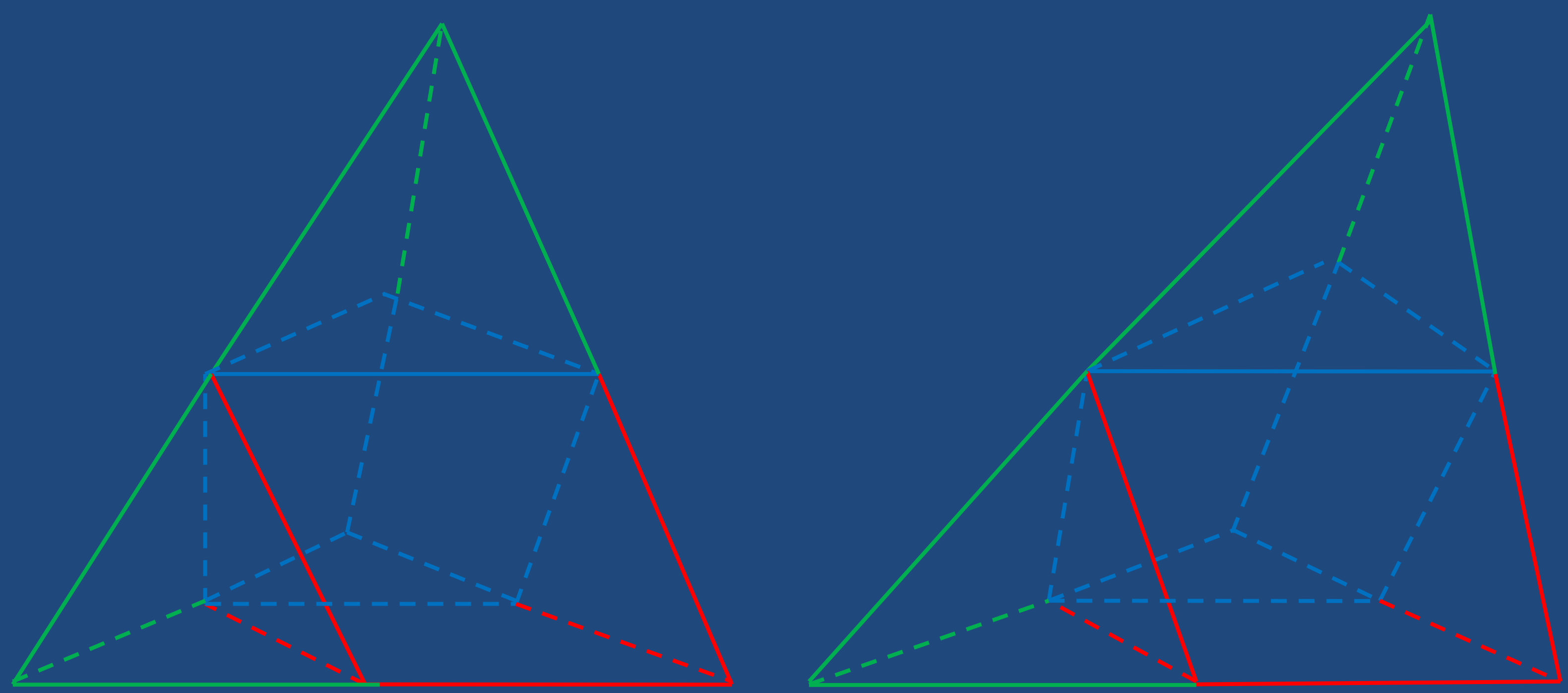
allora

la base di una piramide sta alla base dell’altra come tutti i prismi della prima piramide stanno a tutti i prismi, in egual numero, dell’altra piramide.



Prop.5 - 6

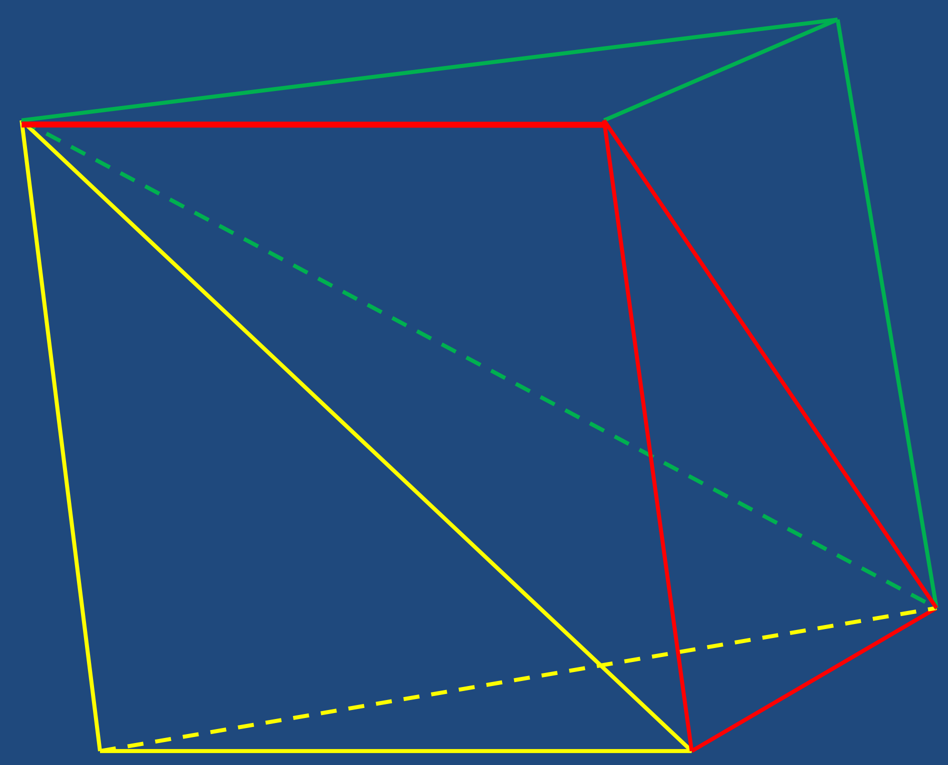
Piramidi aventi la stessa altezza e basi triangolari stanno tra loro come le basi

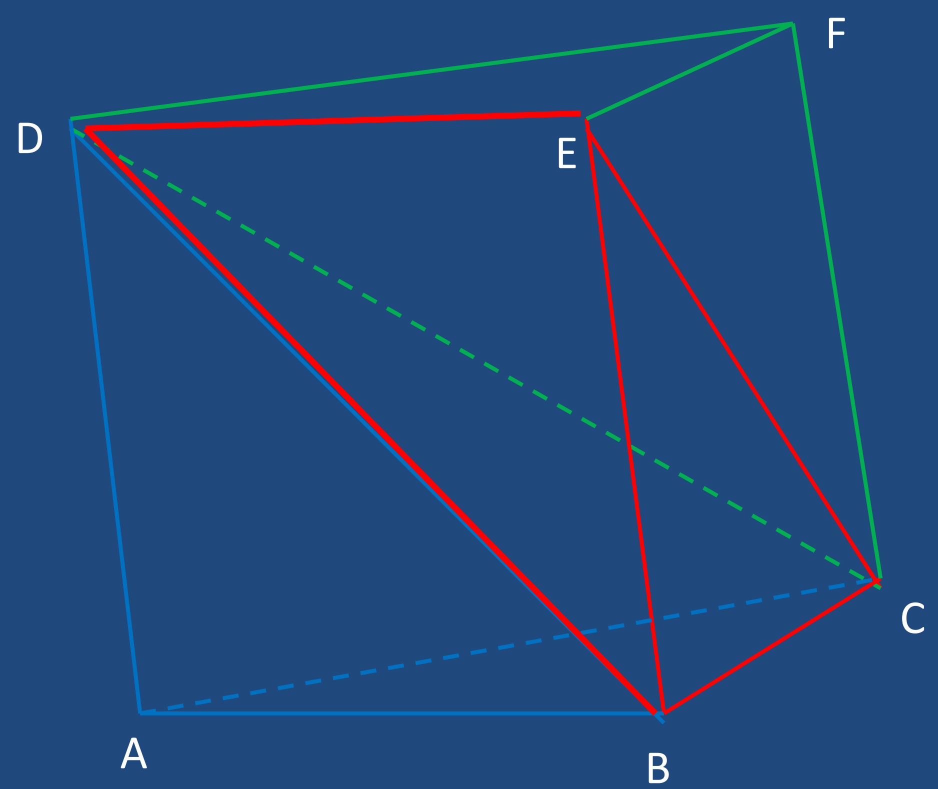


$$V : V' = S_b : S'_b$$

Prop.7

Ogni prisma avente la base triangolare
si divide in tre piramidi uguali tra loro e aventi basi triangolari.





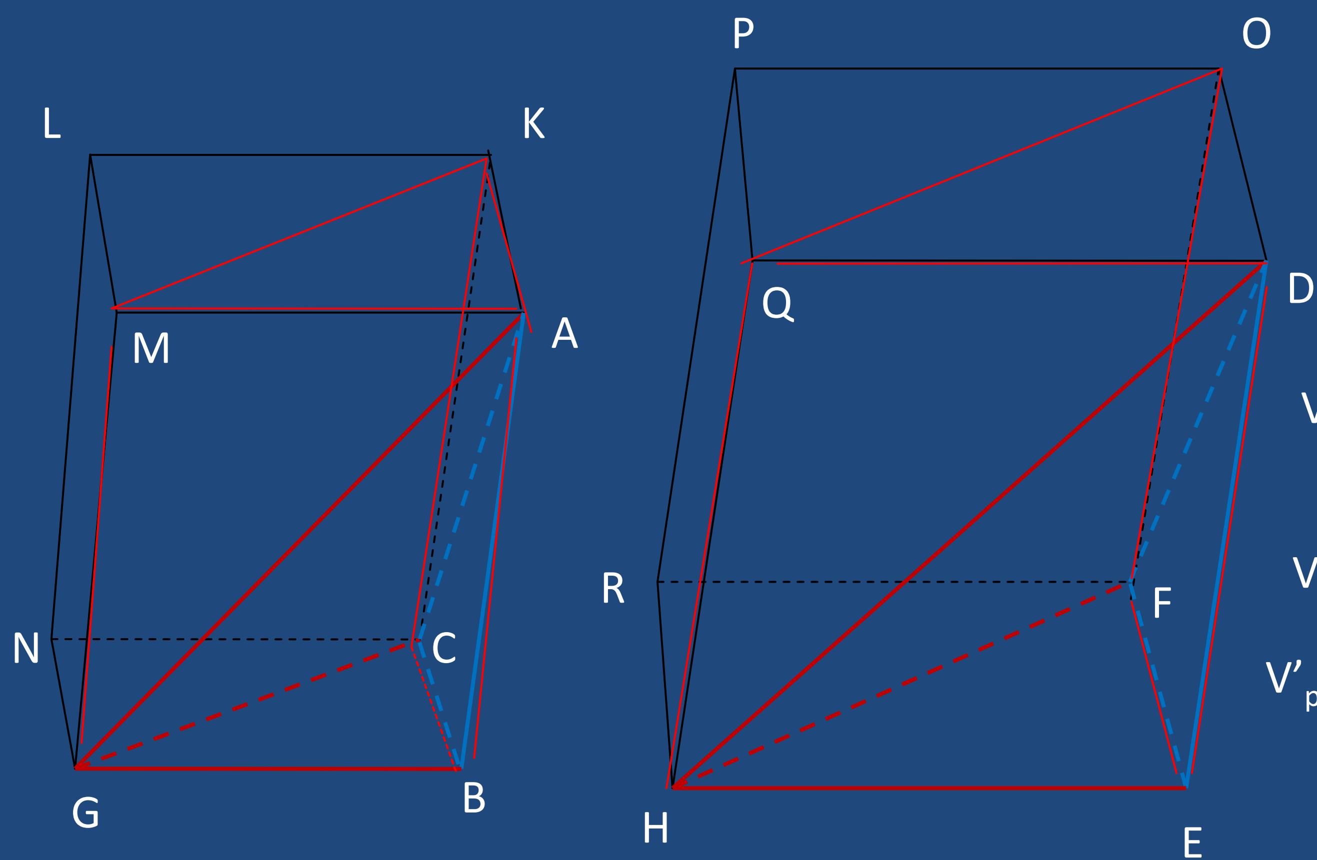
BD diagonale → ABD = DBE →
Piramide di base ABD e vertice C = piramide di base DEB e vertice C

Piramide di base DEB e vertice C = piramide di base BCE e vertice D (è la stessa)

Piramide di base BCE e vertice D = piramide di base CEF e vertice D (CE è diagonale)

Prop.8

Piramidi simili ed aventi basi triangolari sono in ragione tripla dei lati omologhi.



$$V_{par} : V'_{par} = k^3$$

$$V_{par} = 2V_{prisma}$$

$$V'_{par} = 2V'_{prisma}$$

$$V_{prisma} = 3V_{piramide}$$

$$V'_{prisma} = 3V'_{piramide}$$

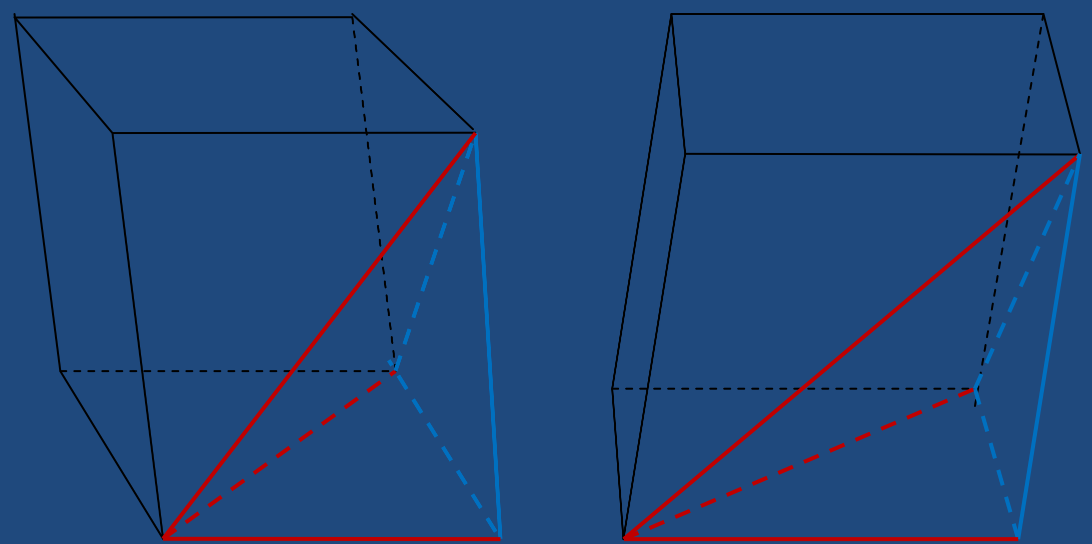
$$6V_{piramide} = 6V'_{piramide} = k^3$$

Prop.9

Le basi di piramidi triangolari uguali sono in ragione inversa delle altezze;

reciprocamente

le piramidi, le cui basi sono in ragione inversa dell’altezza sono uguali.



V1 = V2

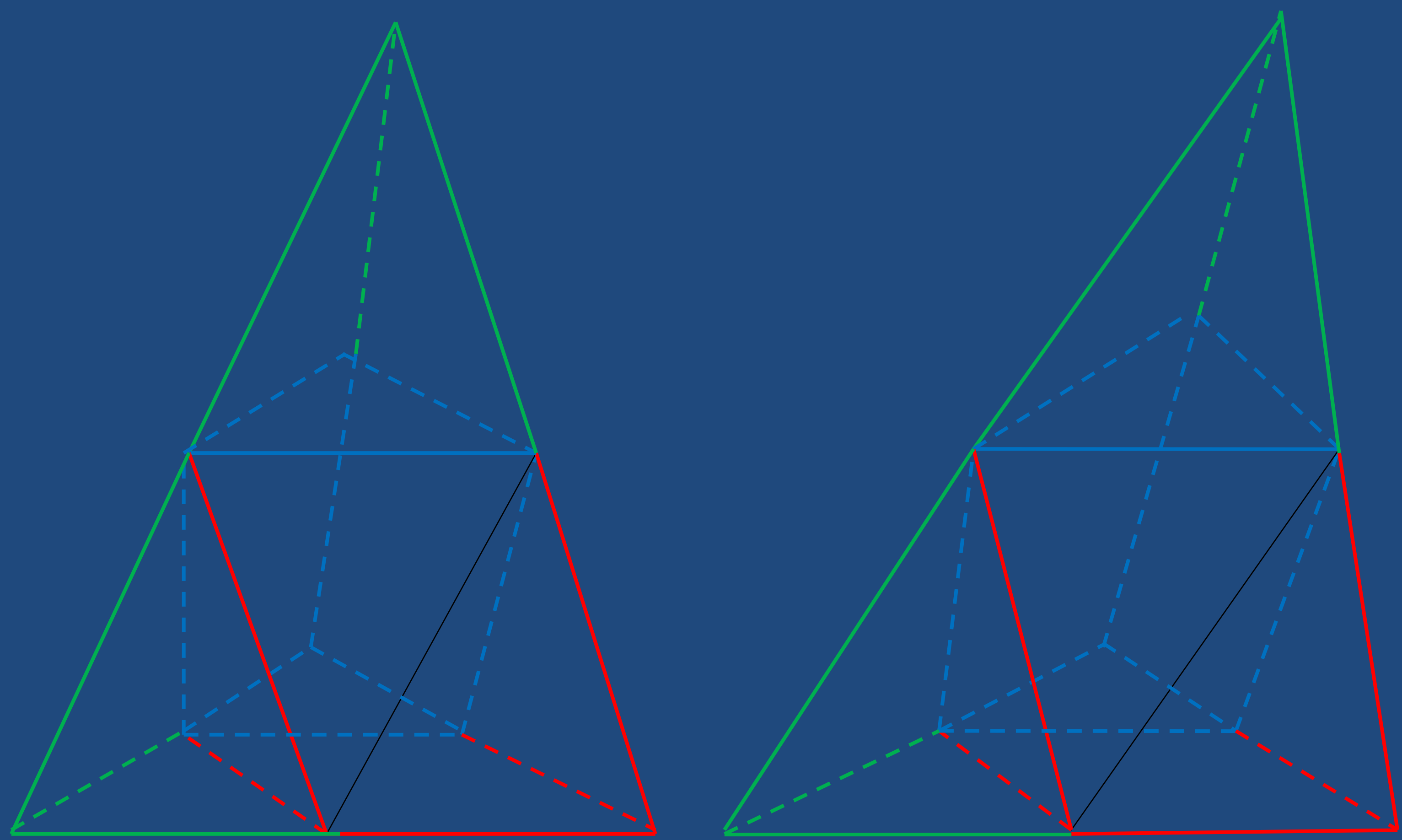
$S_{b1}*h1 = S_{b2}*h2$

$S_{b1} = 2* S_{triang1}$ $S_{b2=}2* S_{triang2}$

$2* S_{triang1} *h1 = 2* S_{triang2} *h_2$

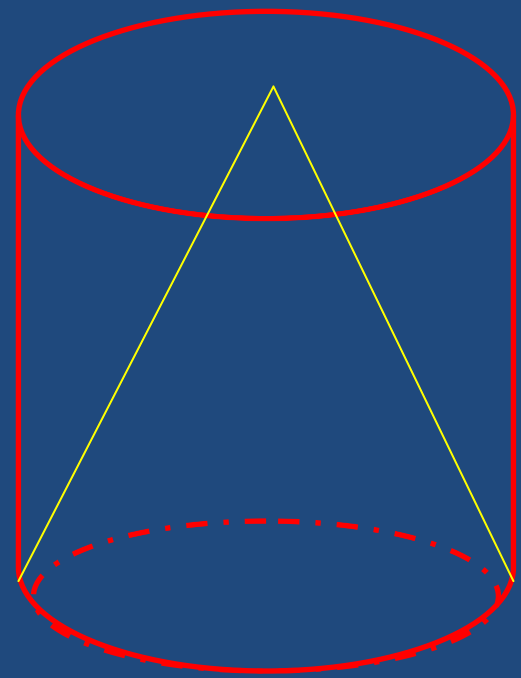
Prop.9

Piramidi aventi la stessa altezza e basi triangolari stanno tra loro come le basi



Ogni cono

è la terza parte di un cilindro avente stessa base e uguale altezza.



Area laterale del cilindro:
è uguale al **cerchio che ha il raggio r1 medio proporzionale tra l'altezza h del cilindro e il diametro di base 2r del cilindro.**
In formule

$$S_{\text{laterale cilindro}} = 2\pi r * h.$$

[$A_{\text{cerchio}} = \pi r_1^2$ con $r_1^2 = h*2r$]

Area laterale del cono:
è uguale al cerchio avente per raggio r1 la media proporzionale tra l'apotema (a) del cono e il raggio r di base del cono
In formule:

$$S_{\text{laterale cono}} = \pi r*a$$

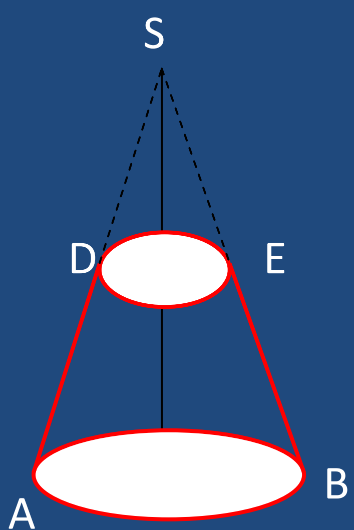
$A_{\text{cerchio}} = \pi r_1^2$ con $r_1^2 = a*r$]

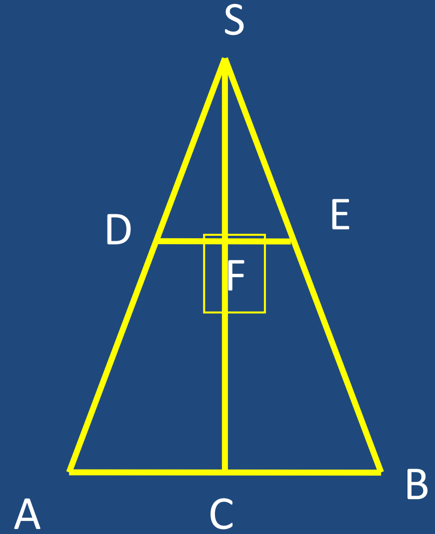
Area laterale del tronco di cono.

è uguale a un cerchio il cui raggio al quadrato è medio proporzionale tra l'apotema del tronco e la somma dei raggi delle basi.

In formula:

$$S_{\text{laterale tronco di cono}} = \pi \,(a_2 - a_1)\,(r_2 + r_1)$$





SA*AC – SD*DF = DA*AC + SD*AC – SD*DF

SD : SA = DF : AC

SD*AC = SA*DF

SA*AC – SD*DF = DA*AC + SA*DF – SD*DF =
= DA*AC + DA*DF =
= DA* (AC + DF)

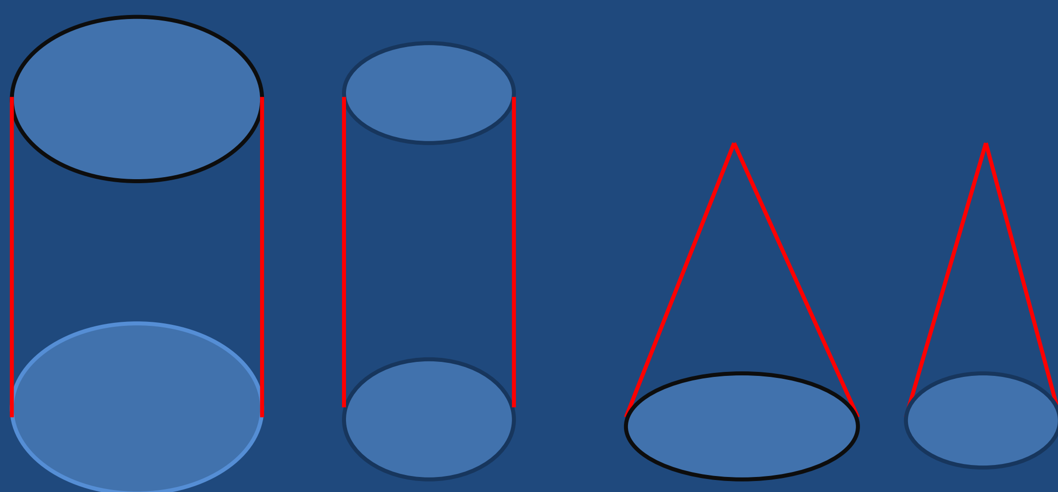
Prop.11

Cilindri aventi la stessa altezza stanno tra loro come le basi.

Coni aventi la stessa altezza stanno tra loro come le basi.

In formule

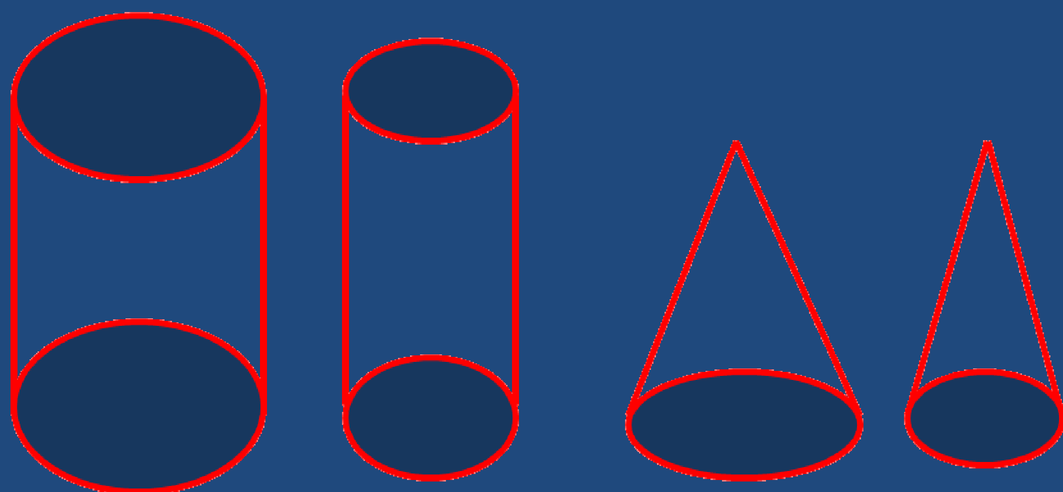
$$V_1 : V_2 = S_{b1} : S_{b2}$$



Prop.12

Cilindri simili sono in ragione tripla dei diametri delle basi

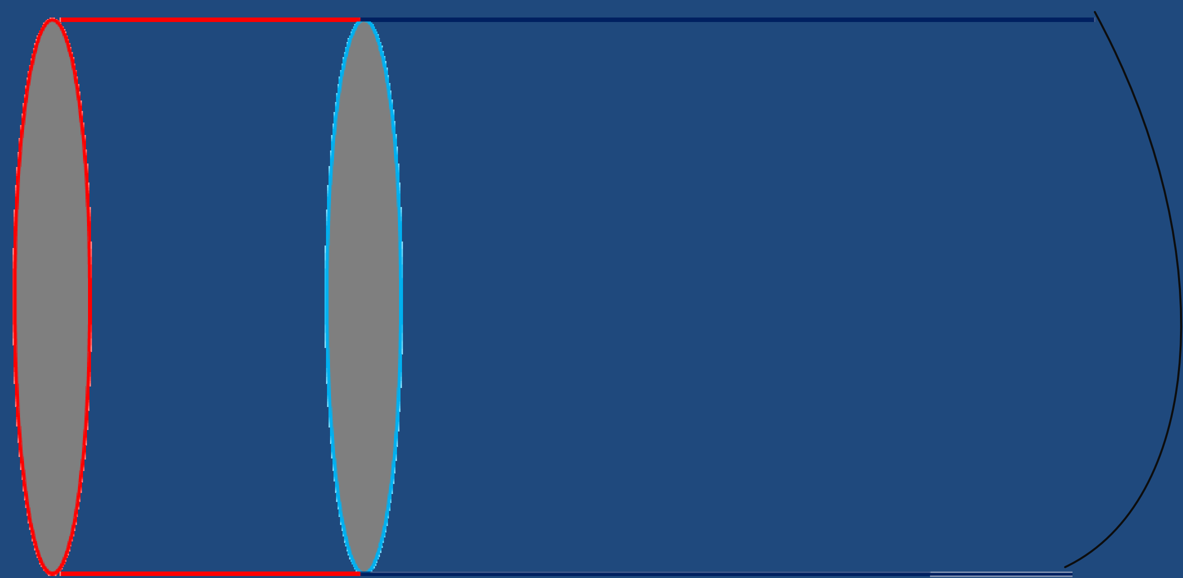
Coni simili sono in ragione tripla dei diametri delle basi



$\mathbf{V_1 : V_2 = k^3}$ con $k = r_1 / r_2 = h_1 / h_2$

Prop.13

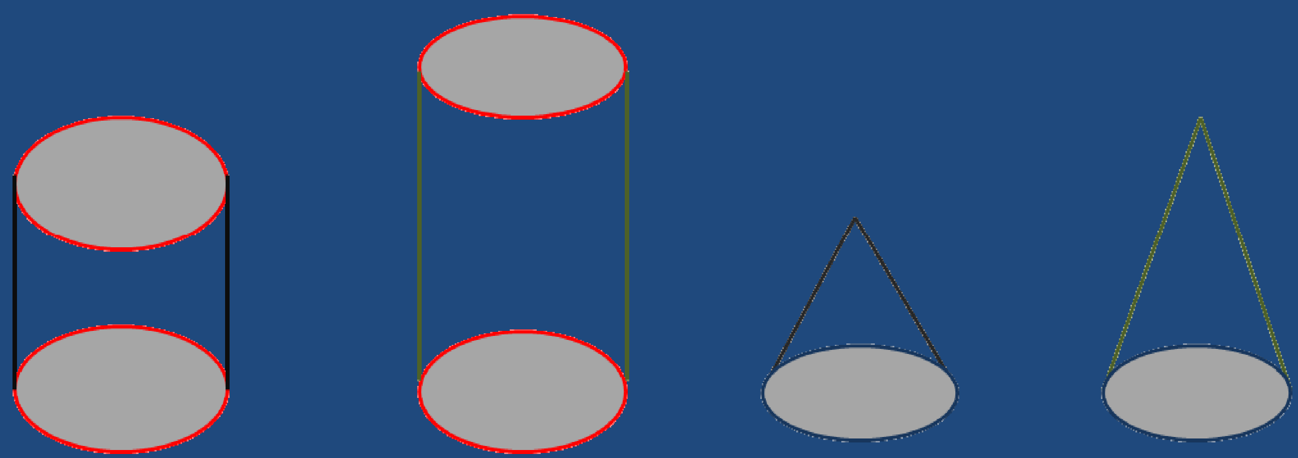
Se si taglia un cilindro con un piano parallelo alle basi, il cilindro sta al cilindro come l'asse sta all'asse.



$$V_1 : V_2 = h_1 : h_2 .$$

Prop.14

Cilindri aventi ugual base stanno tra loro come le altezze
Coni aventi ugual base stanno tra loro come le altezze

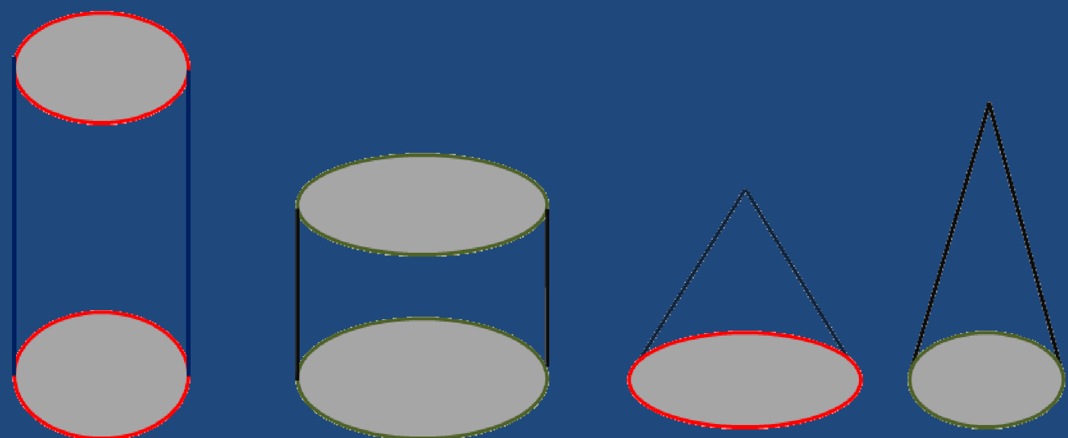


$$V_1 : V_2 = h_1 : h_2 \, .$$

Prop.15

-- Basi di cilindri uguali sono in ragione inversa delle altezze; reciprocamente cilindri le cui basi sono in ragione inversa delle altezze sono tra loro uguali.

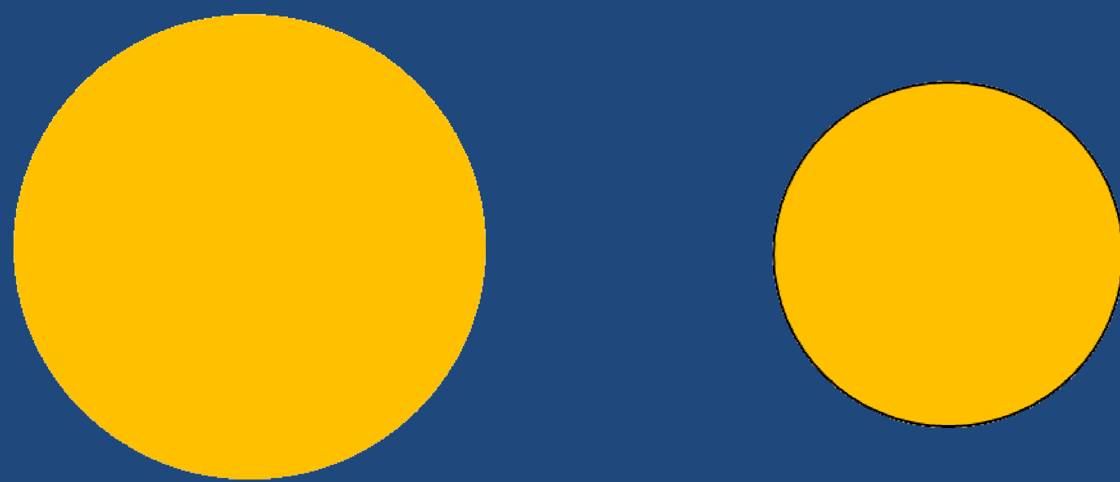
-- Basi di coni uguali sono in ragione inversa delle altezze; reciprocamente coni le cui basi sono in ragione inversa delle altezze sono tra loro uguali.



$$S_{b1} : S_{b2} = h_2 : h_1$$

Prop.18

Le sfere stanno tra loro in ragione tripla dei rispettivi diametri.



$$V_1 : V_2 = k^3$$

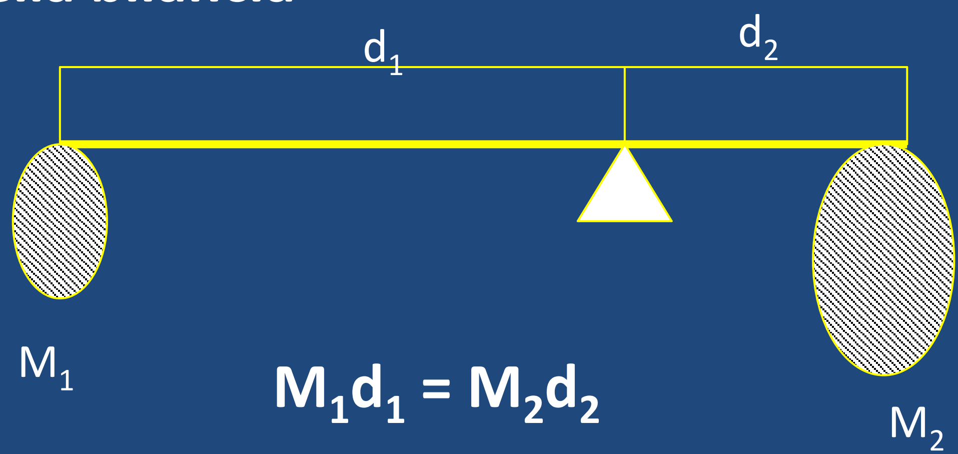
con $k = r_1 / r_2$

Il metodo meccanico di Archimede consiste

a. nel ricorrere a concetti della meccanica (leve in equilibrio, baricentro,..) per dimostrare taluni risultati

b. nel concepire in un modo del tutto nuovo le figure piane e solide.

a.“**legge della bilancia**

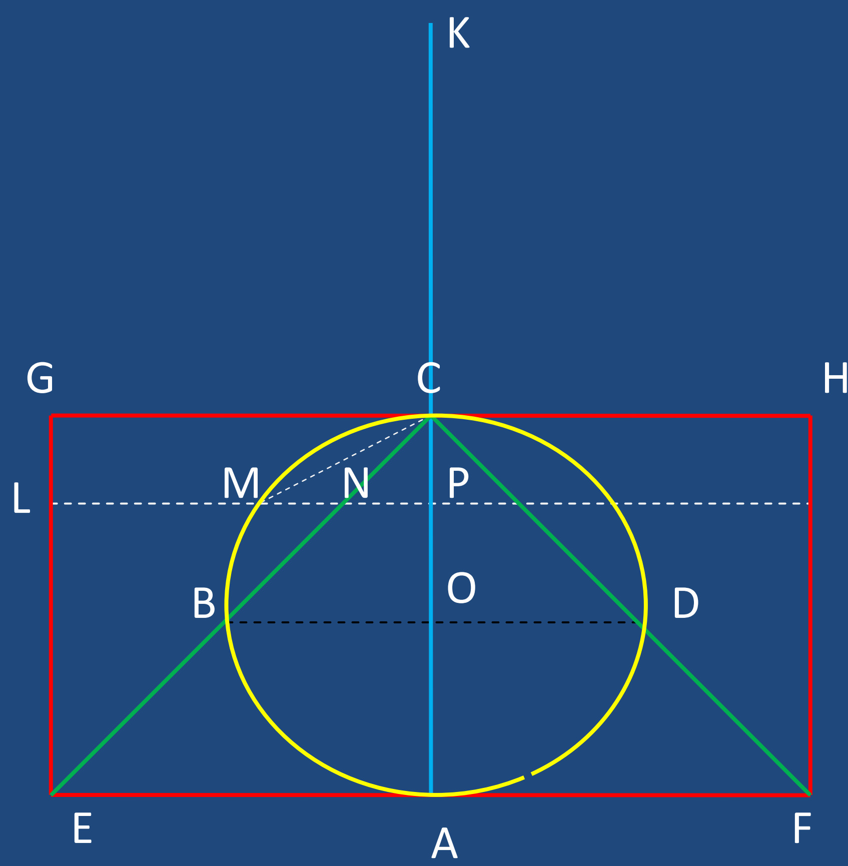


$$M_1 d_1 = M_2 d_2$$

b. le figure piane sono viste come costituite dall’insieme di tutti i segmenti in esse tracciati parallelamente ad un certa direzione

le figure solide come costituite dalle loro sezioni piane parallele ad una certa giacitura.

Volume della sfera



$CK = AC$

$CK/CP = AC/CP =$

$= (AC)^2 / (AC * CP) =$

$= (AC)^2 / (MC)^2 =$

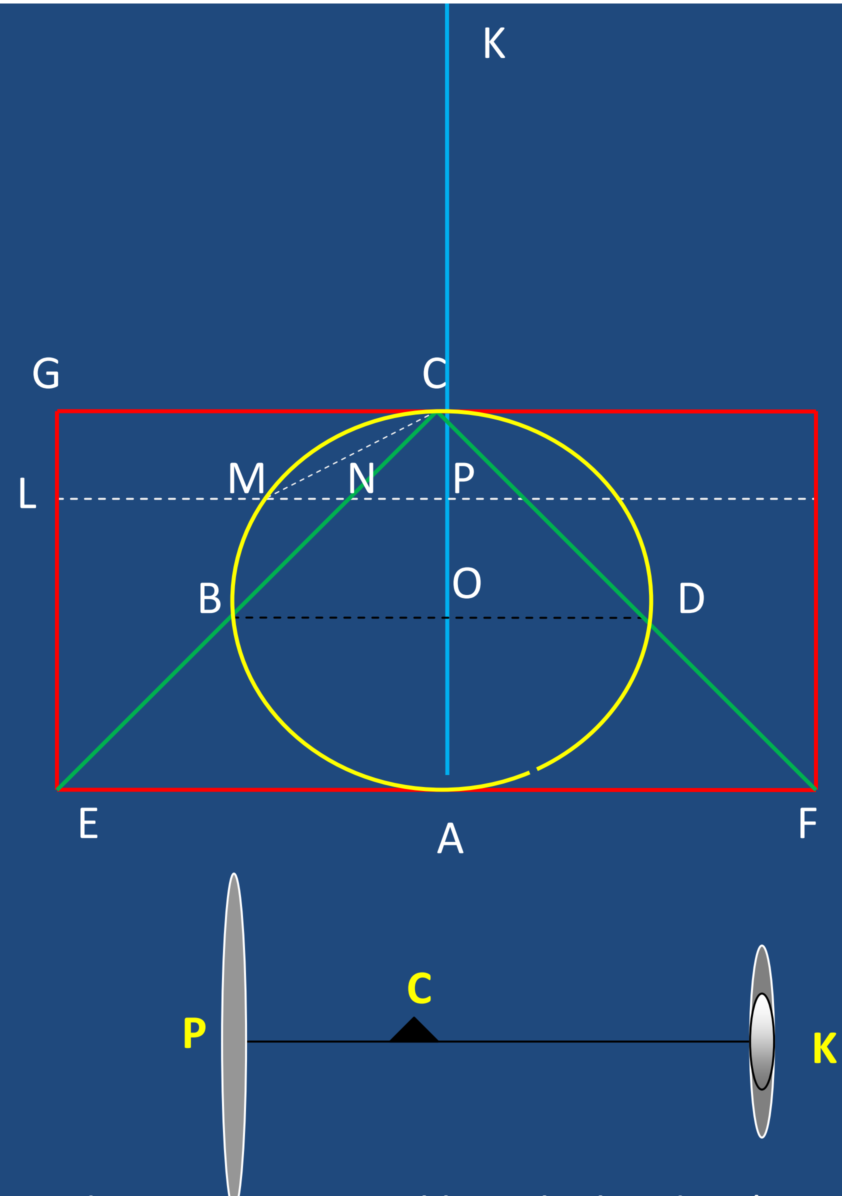
$= (PL)^2 / ((PM)^2 + (PC)^2) =$

$= (PL)^2 / ((PM)^2 + (PN)^2)$

PL, PM, PN sono i raggi di intersezione tra il piano e rispettivamente cilindro, sfera, cono.

$CK : CP = C_{cil} : (C_{sfe} + C_{con})$

E

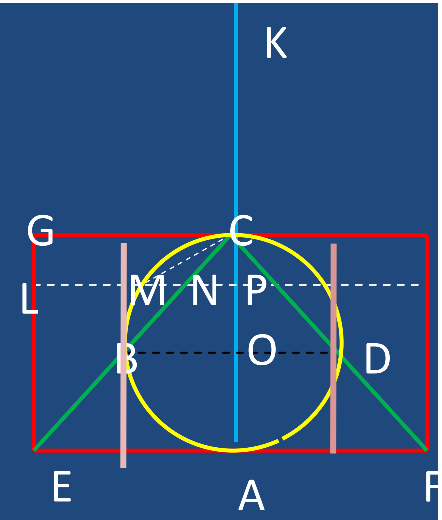


$CK : CP = C_{cil} : (C_{sfe} + C_{con})$

Il C_{cil} lasciato dove si trova equilibra gli altri due (C_{sfe} + C_{con}) portati parallelamente a sé stessi ad avere il centro in K.

Cil : (sfera + Cono) = CK : CO = 2 : 1

Cil : (Sfera + Cono) = CK : CO = 2 : 1



Quindi:

--- il cilindro è doppio del cono e della sfera presi insieme.

-- dal momento poi il cilindro è triplo del cono, si conclude che:

il cono è doppio della sfera,   3 Cono = 2 (sfera + cono)

3 cono = 2 sfera + 2 cono

cono = 2 sfera

il cilindro è sei volte la sfera.,   cono = 2 sfera

3 cono = 6 sfera

cilindro = 6 sfera

Il cilindro circoscritto è ¼ del cilindro

il volume del cilindro circoscritto alla sfera è uguale ai 3/2 del volume della sfera.

il cono inscritto nella semisfera è 1/8 del cono e quindi ¼ della sfera

Il volume della sfera è uguale a quello di un cono che
ha altezza uguale al raggio della sfera e base uguale a quattro cerchi massimi.